

Ingénierie de la Fiabilité

(Calcul de Fiabilité et Exemple)

Ecole Centrale de Lyon - Master GI

2023-2024

Alexander Saidi

Propos

- Cycle de Vie de produits industriels
- Fiabilité et défaillance par des **méthodes et outils informatiques modernes**

Plan

1- Aperçu des méthodes générales de l'extraction de connaissances

2- Fiabilité et défaillances des processus complexes

- ➔ Fiabilité et Cycle de vie de produits
- ➔ Métriques et Distributions
- ➔ Utilisation des Réseaux Bayésiens, Réseaux de Neurones, etc.

1.1 Du chapitre précédent

Pour approfondir, voir dans le chapitre précédent :

* **Exemples Bayésiens :**

- A partir de la page 56 du cours -1 : exemples de calcul.
 - Exemple générateurs : Page 56 du support cours-1.
 - ➔ On verra plus loin cet exemple dans ce chapitre.
 - Exemple Désenfumage : Page 65 du support cours-1.

* **Vers les Méta-méthodes :**

- Notions de Biais-Variance : Page 91 du support cours-1.

1.2 Introduction

1.3 Un exemple simple de prédiction de fiabilité

- Données de défaillance sur un composant mécanique dans les véhicules **Renault**.

Buts :

1. Identifier et hiérarchiser l'influence des *variables explicatives* sur le *Taux de défaillance* moyenne du composant.

Deux types de variables explicatives :

- Caractéristique technique du véhicule ("type véhicule", "puissance moteur", etc.)
- Les conditions d'utilisation ("pays", "type utilisateur", etc.)

2. Déterminer la corrélation entre les variables explicatives.

- Le modèle permet de de construire une méthodologie d'exploitation des **données ReX**.
- **Approches complémentaires utilisées : Régression Logistique & BN.**

1.3.1 *Les données ReX du problème*

- Récupérées pendant une certaine période de garanti (par Renault)
- Les informations collectées par les garagistes :
 - Identifiant du véhicule défaillant (Id unique, date de fabrication,..),
 - Caractéristiques techniques (puissance, type d'équipement, etc.),
 - Données de son utilisation (pays, kilométrage, etc)
 - Les données de maintenance.
 - **Panne!**
- La variable cible : **Taux de défaillance.**
 - ➔ Simplification : une seule modalité de panne.

- Les variables explicatives (qui influencent le *Taux de défaillance*) :
 - Type du véhicule : $V = \{V1, V2, \dots V5\}$
 - Pays où l'incident a été enregistré : $Pays = \{P1, \dots P10\}$
 - Type de boîte de vitesse : $B = \{BVA(\text{automatique}), BVM(\text{manuel})\}$
 - Présence de climatisation : $C = \{CA(\text{présent}), DA(\text{absent})\}$
 - Type d'utilisateur : $U = \{S(\text{société}), P(\text{particulier})\}$
 - Puissance du moteur : $P = \{pw_1, \dots pw_4\}$
- Exemple de données (exploitables par les méthodes d'EC) :

Véhicule (V)	Puissance (P)	Clim (C)	Utilisateur (U)	Boit (B)	Pays	Nb. véhic.	Taux
V1	pw1	DA	S	BVA	P1	5857	0,022
V2	pw1	CA	P	BVM	P1	100	0
V3	pw2	CA	P	BVM	P3	750	0,015
V3	pw3	DA	S	BVA	P4	220	0,02
...	

1.3.2 Quelques mots sur la Régression

Exemple : pour une base de données avec une seule variable explicative x

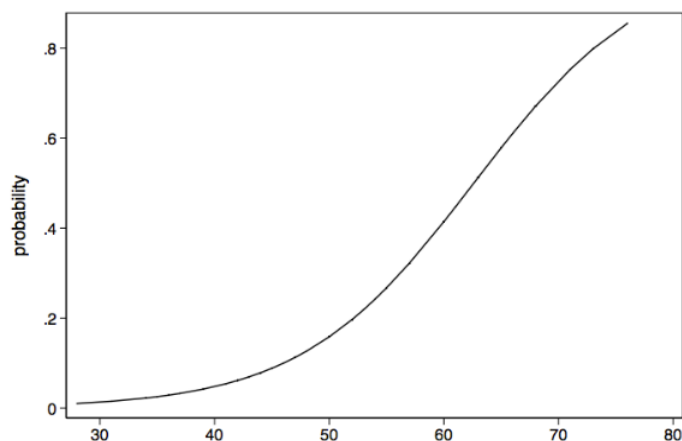
- Le modèle de Régression Linéaire :

$$\mathbb{E}[\hat{Y}] = \alpha.X = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

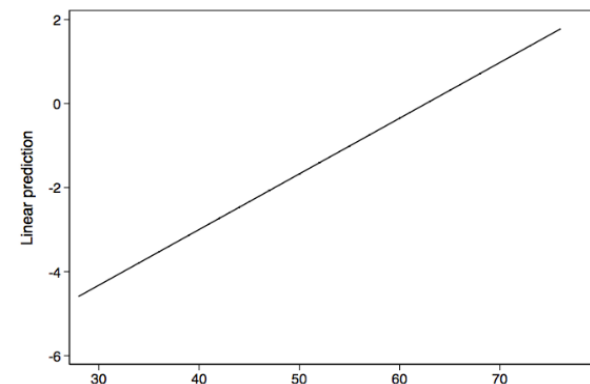
- Variantes Logistique et Non-linéaire :

$$(2) \text{ Logistique : } \hat{Y} = \frac{e^{\alpha_0 + \alpha_1 x}}{1 + e^{\alpha_0 + \alpha_1 x}}$$

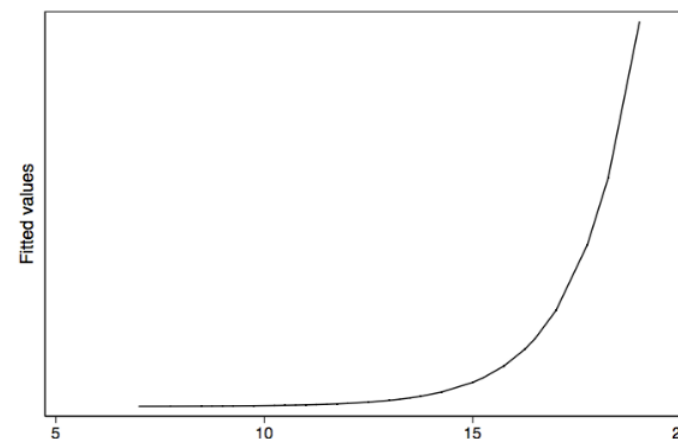
\hat{Y} est une probabilité (cas bi-classes)



$$(1) \text{ Linéaire : } \hat{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 x$$



$$(3) \text{ Non Linéaire : } \hat{Y} = \alpha_0 \cdot \alpha_1^x$$



1.3.3 Application de la régression logistique

- **Régression Logistique** : méthode intéressante dans le cas de classes binaires.

- Si pour chaque donnée, les variables explicatives sont $X = x_1 \dots x_p$

et la classe $Y \in \{0, 1\}$ (défaillance : Oui/ Non), alors on note :

$\pi(x) = Pr(Y = 1|X = x)$ la probabilité d'être défaillant sachant X (X : vars. explicatives).

- Le modèle de Régression Logistique est estimé par la *log vraisemblance* .

$$\log \left(\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)} \right) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p \quad \text{dit également } \log(odds) \text{ ou } \textit{logit}$$

→ Où $\alpha.X = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$ est le modèle linéaire.

- **La probabilité** (de classification binaire 1/0) s'obtient par :

$$\pi(x) = (class = 1|x) = \frac{\exp(\alpha.X)}{1 + \exp(\alpha.X)}$$

- En Rég. Logistique, $\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}$ est appelé *Odds* (côtes)

et

OR = *Odds Ratio* = ratio de 2 Odds.

- Pour une classification, on utilise à la fois une Probabilité (ci-dessus) et/ou un OR.

Interprétation des résultats de la Régression Logistique (par OR) :

- *Odds Ratio* = OR (le rapport de cotes) est défini par :

$$odds_ratio = OR = \frac{odds_1}{odds_2} = \frac{\left(\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\right)}{\left(\frac{\pi_2}{1-\pi_2}\right)}$$

→ Cette valeur s'obtient (aussi) via les coefficients du modèle linéaire.

Par exemple, on aura : **OR** = $\exp(\alpha_1) = e^{\alpha_1}$

si $\alpha.X = \alpha_0 + \alpha_1 x$ est le modèle linéaire d'un cas avec 1 seule var expl.

Un premier exemple de OR :

- Pour l'unique variable explicative $X = \text{genre} \in \{femme, homme\}$,
 - Supposons que $X = 1$ veut dire *genre=homme*
et $X = 0$ veut dire *genre=femme*.
 - On calcule, pour une **variable cible (À PRÉDIRE) = une certaine maladie**
 - le ratio entre $\pi(1)$ (être homme et être malade) et $1 - \pi(1)$ (homme et non malade)
 - Soit par exemple $\frac{3}{7}$
 - le ratio entre $\pi(0)$ (être femme et être malade) et $1 - \pi(0)$ (femme et non malade)
 - Soit par exemple $\frac{2}{8}$
 - OR : le ratio entre les deux : $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{8}} = 1,71$
- Les hommes sont malades 1,71 fois plus que les femmes (dans cette étude).

Un autre exemple de OR :

- Une BD contient les fréquences des résultats d'admission chez les alpinistes pour nettoyer les vitres des "gratte-ciel" sur (un échantillon de) 10 filles et 10 garçons.
- La variable explicative considérée (x) est le **Genre** et la décision (y) est l'**Admission**.
- Le modèle linéaire obtenu : $\hat{y} = 1.68x - 0.84$

		Admission	
		oui=1	non = 0
Genre (g)	g = 1	7	3
	g = 0	3	7

- Par définition : $\text{logit}(P) = \log(\text{odds}) = \log\left(\frac{P}{1-P}\right) = \alpha_1 x + \alpha_0$
- $P(\text{Admis}|x) = \frac{e^{\alpha_1 x + \alpha_0}}{1 + e^{\alpha_1 x + \alpha_0}} = \frac{e^{1.68x - 0.84}}{1 + e^{1.68x - 0.84}}$
- $OR = e^{\alpha_1} = e^{1.68} = 5.4$ représente en même temps : $\frac{\text{odds}(\text{garcon})}{\text{odds}(\text{fille})} = \frac{\frac{P(\text{Admis}|\text{garcon})}{P(\text{Non_admis}|\text{garcon})}}{\frac{P(\text{Admis}|\text{fille})}{P(\text{Non_admis}|\text{fille})}}$

→ Être garçon (g=1) et admis à ce métier est 5.4 fois plus probable que pour une fille.

- Pour obtenir la même valeur par OR : $\text{odds}(\text{garcon}) = \frac{P(\text{Admis}|\text{garcon})}{P(\text{Non_admis}|\text{garcon})} = \frac{7}{3}$

$$\text{odds}(\text{fille}) = \frac{P(\text{Admis}|\text{fille})}{P(\text{Non_admis}|\text{fille})} = \frac{3}{7}$$

$$\rightarrow \frac{\text{odds}(\text{garcon})}{\text{odds}(\text{fille})} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{7}} = \frac{49}{9} = 5.4$$

un raccourcis pour rapidement calculer α_1

A propos de l'interaction en Régression (non linéaire) :

- Soit un modèle **additif** où l'on explique la variable (prédictive) y par l'effet (linéaire) des variables explicatives x_1 et x_2 :

$$y = ax_1 + bx_2 + c + \epsilon$$

- Pour les mêmes données, on peut exprimer une **interaction** entre x_1 et x_2 par le modèle

$$y = ax_1 + bx_2 + c + \epsilon + d(x_1, x_2)$$

où l'effet de x_1 (ou de x_2) sur y est mesuré par la fonction d (d : un produit, un & logique, etc.).

- ☞ Il y aura un **effet d'interaction** lorsque la variable cible y est conditionnée par le **couplage** de deux variables explicatives x_1 et x_2 . Par exemple, dans ($x_1.x_2$ devient discriminant)

Instance	x_1	x_2	$x_1.x_2$	y
1	-1	-1	1	10
2	-1	1	-1	21
3	1	-1	-1	19
4	1	1	1	9

- ➔ On constate l'effet de x_1x_2 sur y ; ce qui **n'est pas directement visible via x_1 ou x_2** .
- ➔ On peut ensuite s'intéresser plus particulièrement à l'effet de x_1 (ou de x_2).

- Dans une interaction, on cherche à connaître l'influence simultanée de deux variables sur une troisième (dépendante des deux) sachant que cette influence n'est pas (seulement) additive.

☞ **Si deux variables sont en interaction, la relation entre chacune de ces deux variables et la troisième dépendra des valeurs d'autres variables en interaction** (parfois non mesurées).

➔ Ce qui a pour résultat pratique de compliquer la prédiction des conséquences de changement de valeur d'une variable.

En particulier si les autres variables avec lesquelles celle-ci est en interaction sont difficiles à mesurer, voire non mesurées (cf. variables *latentes*).

- Dans la table ci-dessus (rappelée ci-contre), on cherchera à savoir si y varie en fonction de x_1 sachant x_2 (et inversement) :

Instance	x_1	x_2	$x_1.x_2$	y
1	-1	-1	1	10
2	-1	1	-1	21
3	1	-1	-1	19
4	1	1	1	9

➔ On constate que y est "fort" si x_1 est "faible" et x_2 est "fort",
ou bien si x_1 est "fort" et x_2 est "faible" ($x_1 x_2 = -1$).

- Une interaction peut (aussi) fixer une variable explicative pour expliquer la cible (cf. ci-après).
- **Revenons à l'expérience Renault ...**

1.3.4 Renault : résultats de la Régression Logistique

- Sur l'ensemble de la BD, on obtient les résultats suivants (calculs de OR) :
 - 3 variables ont des effets statistiques significatifs sur le Taux (de défaillance) :
"Type Véhicule", "type utilisation" et "Pays" :

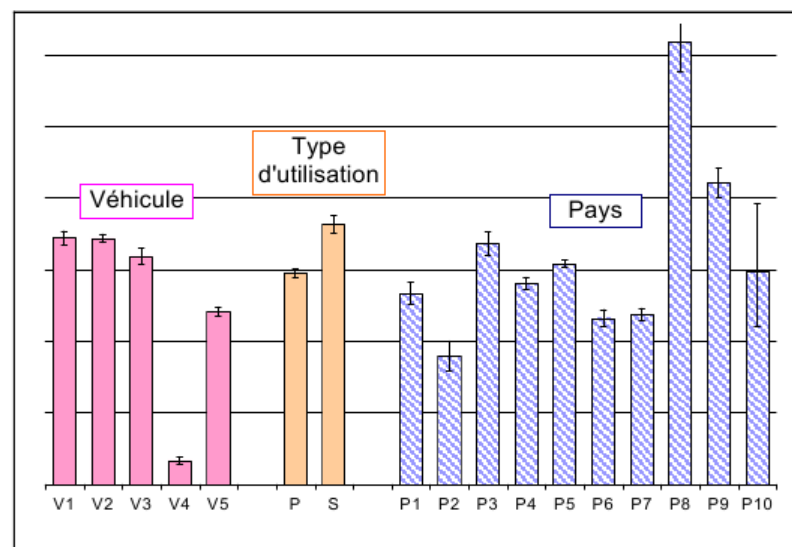


FIGURE 1.1 – les 3 variables à effets significatifs sur la cible

- Pour réaliser cette figure, on a calculé l'effet de chacune des 3 variables
- On peut ensuite considérer les **interaction** (entre 3 variables ou plus).

- L'**interaction** entre "Véhicule" et "Type Utilisation" semble significative sur la défaillance.

→ Elle montre l'effet du "Type Utilisation" sur la défaillance pour un "Véhicule" donné

(P = "Particulier", S = "Société", V_i : différents types de "Véhicule").

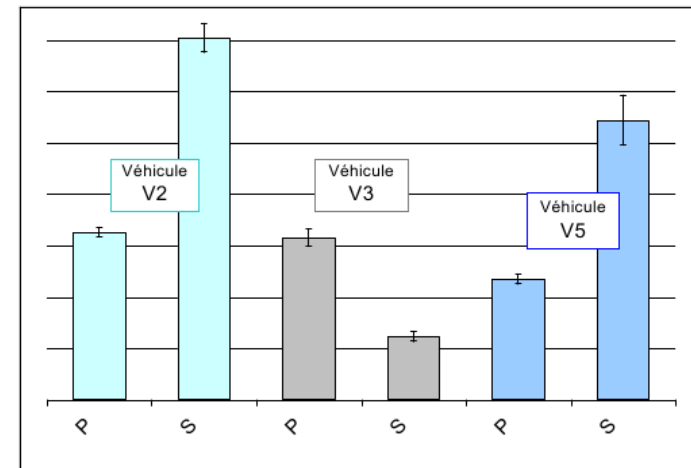
Par exemple (ici expression d'une interaction par la règle de Bayes) :

$$- OR(P \text{ vs. } S | V_3) = 2.5$$

$$- OR(P \text{ vs. } S | V_2) = 0.5$$

$$- OR(P \text{ vs. } S | V_5) = 0.5$$

→ On remarque ici que S ("Société") est pénalisant pour la défaillance des véhicules du type V_2 et V_5 tandis que le type d'utilisation "particulier" est pénalisant pour V_3 .



Avantages / Inconvénients de Régression logistique :

- + Identification des variables significatives et leur hiérarchisation,
 - + Prise en compte des variables continues (selon l'outil utilisé).
 - Par contre, l'interprétation des résultats (*Odds Ratio* par exemple) est quelque peu difficile (nécessité de *post traitement*).
 - De même, si les variables sont fortement corrélées, il faut avoir recours aux techniques de sélection des variables ("feature selection" : nécessité de *pré traitement*).
- Petite remarques complémentaire sur les calculs :

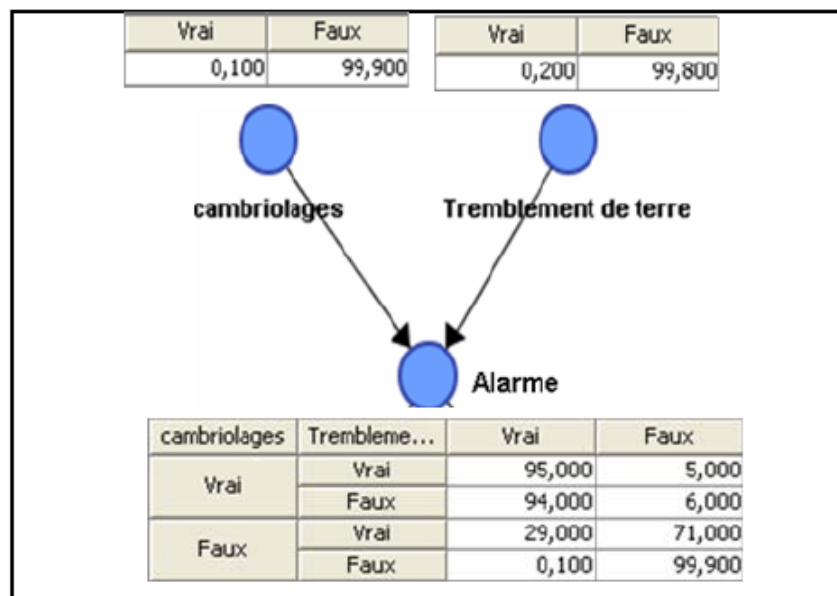
Ces calculs ont également montré que le type de boîte (BVA, BVM) a un effet statistique sur la défaillance (la boîte automatique BVA n'existe que sur des véhicules des particuliers)

➔ Les calculs ont donné : $OR(BVA \text{ vs. } BVM | type) = 1.9$

C-à-d. : BVA est pénalisant pour la défaillance.

1.3.5 Application des BN à la même BD.

- Un BN (Bayesian Network) est un graphe orienté qui exprime l'incertitude (une probabilité) de la connaissance des relations entre les variables.
- Un exemple :

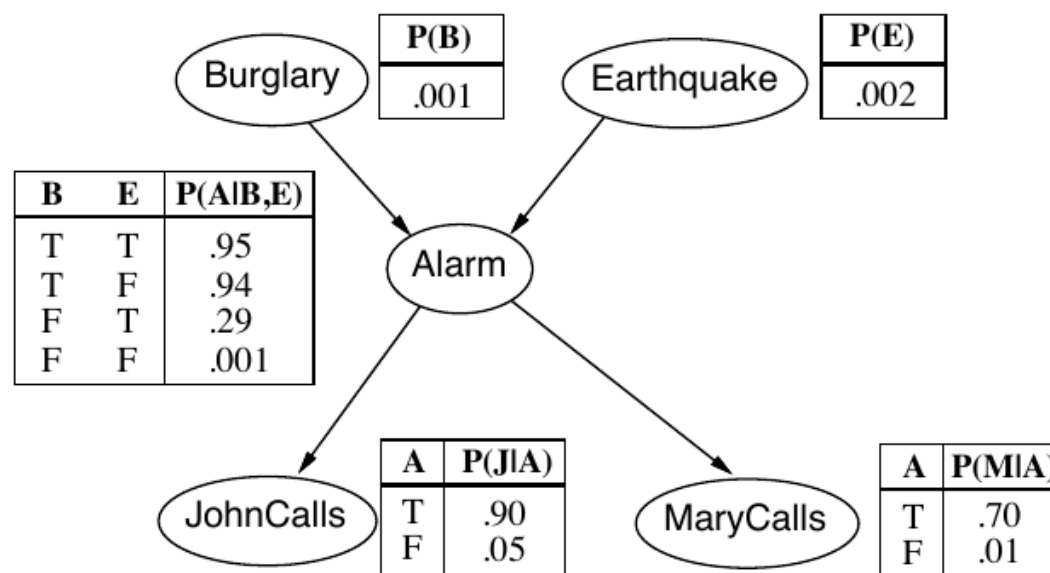


- Rappel : règle de Bayes.

→ aller à 2 types BN

1.3.6 Petite introduction aux BN

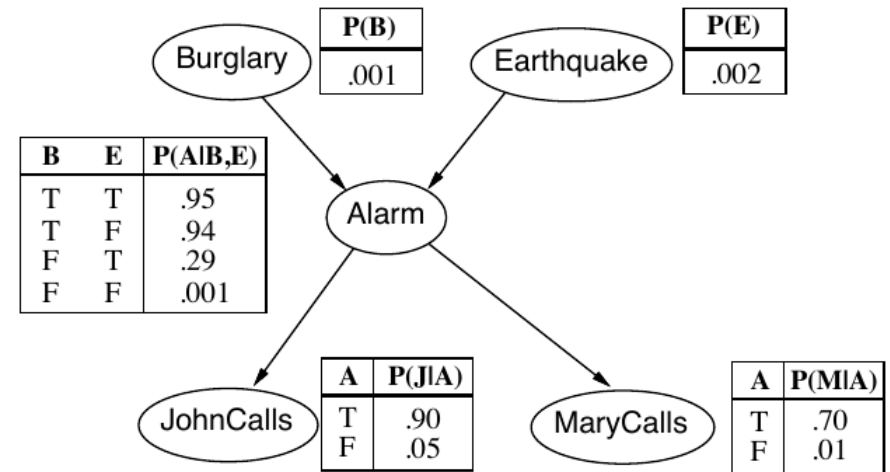
- N.B. : Avant de voir l'application des BN à cette même BD., étudions un exemple classique.
- **Faits** : *John mon voisin m'appelle (au travail) pour me dire que mon alarme antivol sonne*
 - Mais ma voisine *Mary* (qui m'appelle habituellement) n'a pas appelé.
 - Je sais aussi que parfois, une petite *secousse* perturbe l'*alarme*!
- **Ex. de Question** : y a-t-il un cambriolage chez moi suite à l'appel de John ? (voir ci-après)



- **Variables** : Cambriolage (B), Tremblement de Terre (E), Alarme (A), JohnCalls (J), MaryCalls (M)
- Le réseau BN par sa topologie nous donne

l'information "causale" :

- Un cambrioleur (B) peut activer l'alarme (A)
- Une secousse (E) peut activer l'alarme
- Mary (M) appelle si l'alarme sonne
- John (J) appelle si l'alarme sonne



- Ici, on a $P(B, E, A, J, M) = P(B) \cdot P(E) \cdot P(A|B, E) \cdot P(J|A) \cdot P(M|A)$

- Exemple de calcul (noter la **simplification** apportée par le BN) :

J. & M. m'appellent et l'alarme s'est activée. Quelle proba. qu'il n'y ait ni Cambriolage ni T. terre.

$P(B = F, E = F, A = T, J = T, M = T)$ qu'en plus il n'y ait ni cambriolage ni Tremblement ?

$$= P(B = F) \cdot P(E = F) \cdot P(A = T|B = F, E = F) \cdot P(J = T|A = T) \cdot P(M = T|A = T)$$

$$= 0.999 \cdot 0.998 \cdot 0.001 \cdot 0.9 \cdot 0.7 = 0.00063$$

Un autre exemple de calcul : sur ce réseau, on peut calculer sur le noeud A

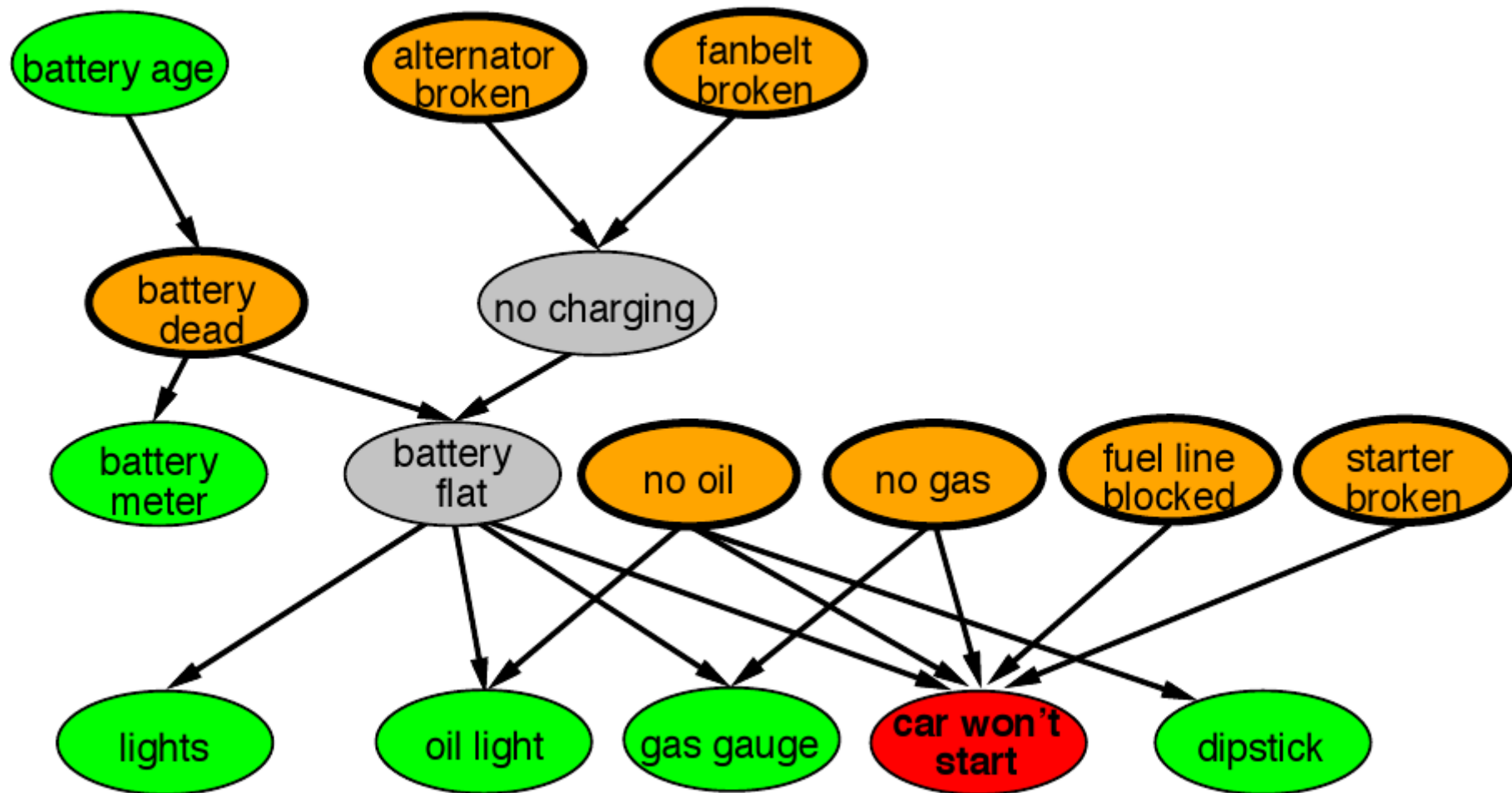
$$\begin{aligned}
 P(A = T) &= P(A = T|B = t, E = T) \cdot P(B = T) \cdot P(E = T) \\
 &\quad + P(A = T|B = t, E = F) \cdot P(B = T) \cdot P(E = F) \\
 &\quad + P(A = T|B = F, E = T) \cdot P(B = F) \cdot P(E = T) \\
 &\quad + P(A = T|B = F, E = F) \cdot P(B = F) \cdot P(E = F) \\
 &= 0.95 * 0.001 * 0.002 + 0.94 * 0.001 * 0.998 + 0.29 * 0.999 * 0.002 + 0.001 * 0.999 * 0.998 \\
 &= 0.0025.
 \end{aligned}$$

Un autre exemple :

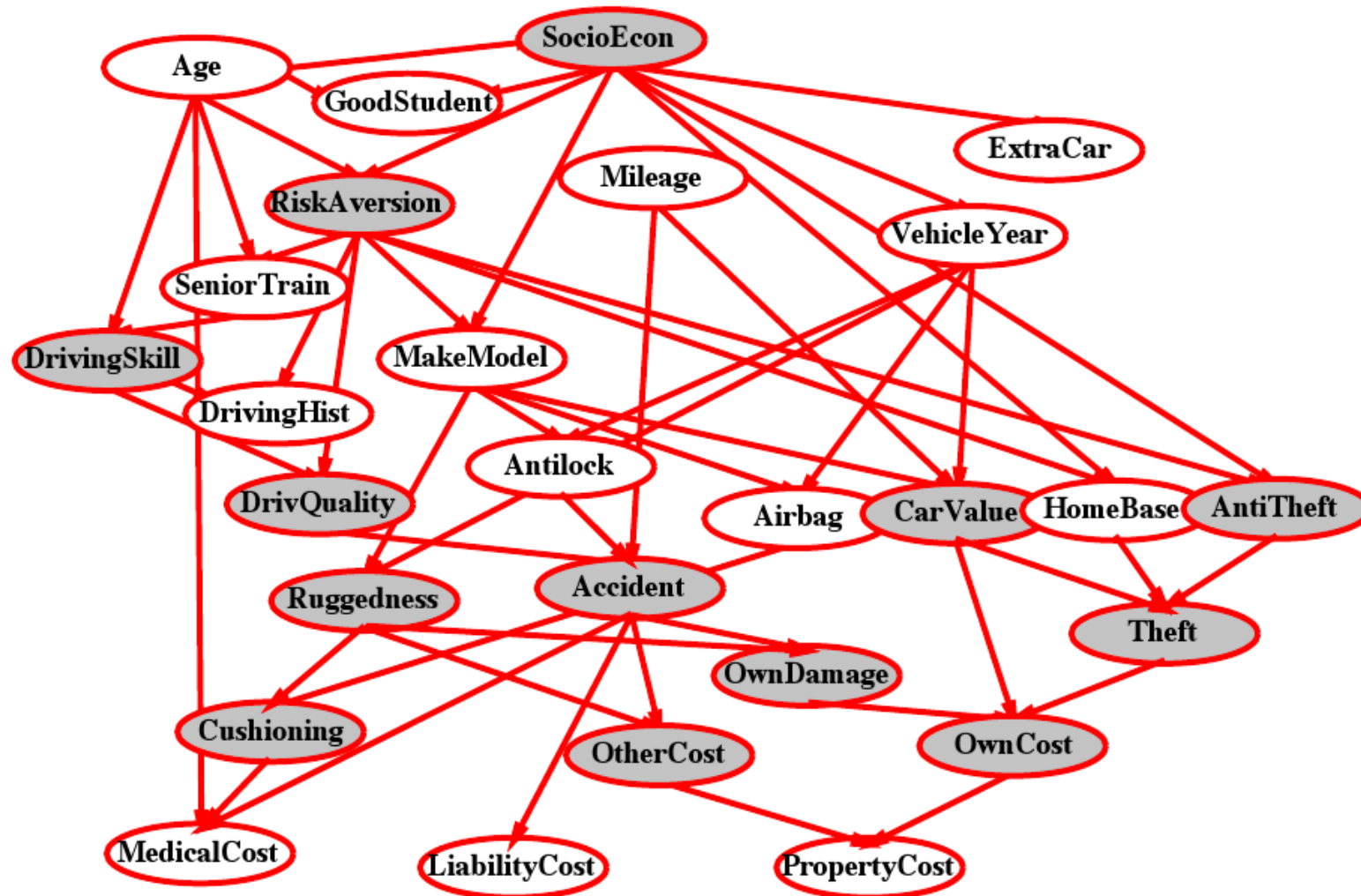
$$\begin{aligned}
 P(A = T|J = T) &= \frac{P(J = T|A = T) \cdot P(A = T)}{P(J = T|A = T) \cdot P(A = T) + P(J = t|A = F) \cdot P(A = F)} \\
 &= \frac{0.9 * 0.0025}{0.9 * 0.0025 + 0.05 * 0.9975} \\
 &= 0.043
 \end{aligned}$$

- **Faire les calculs pour la question posée ci-dessus :** $P(B = T|J = T)$?

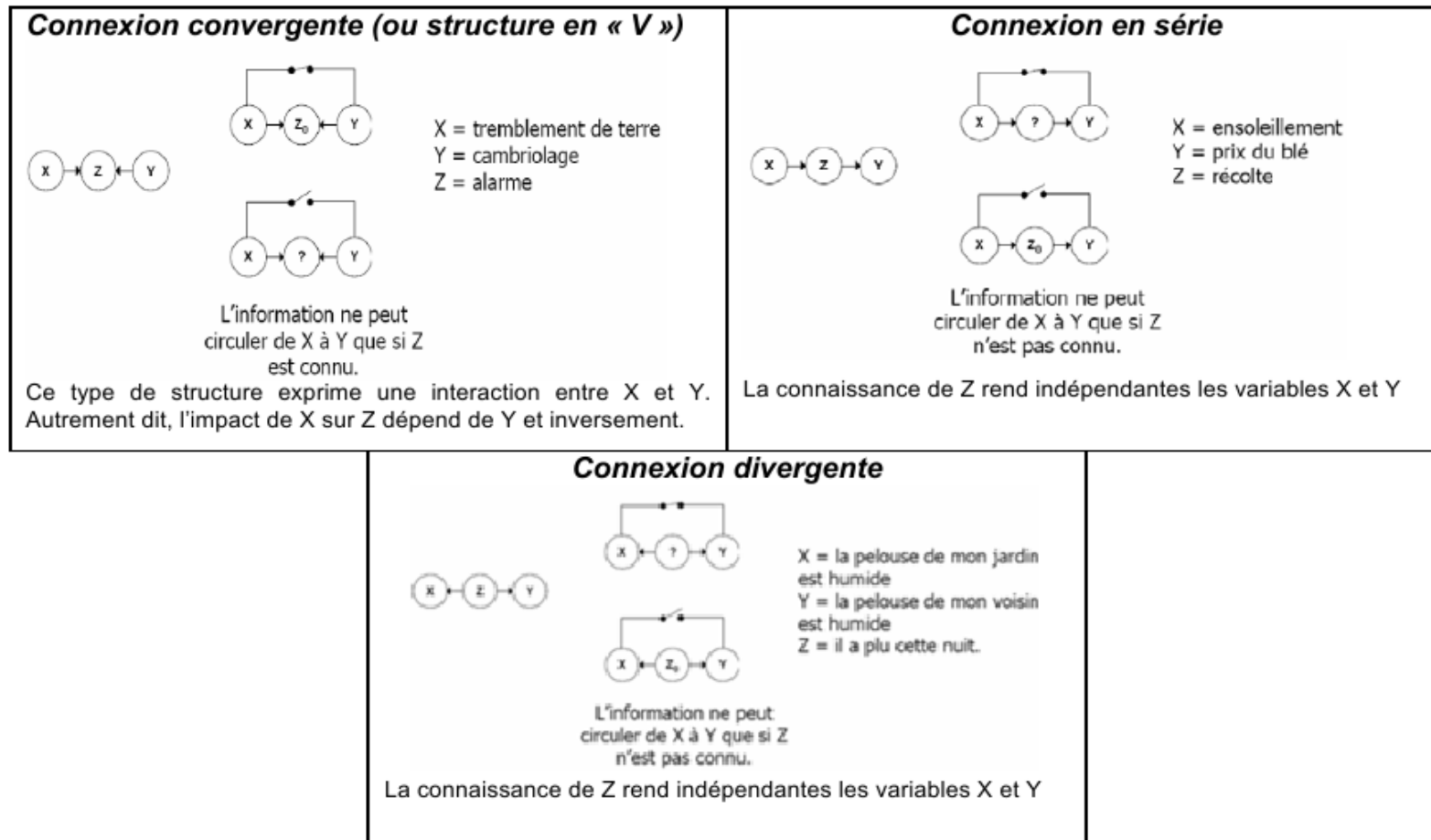
Un autre exemple de BN : panne de voiture!



Encore un exemple de BN : assurance des voitures !



Complément sur les règles d'interprétation et de raisonnement sur un BN (important) :



"circulation d'info entre A - B " : A m'apprend quelque chose sur B .



Cette circulation ne suit pas (forcément) le sens des flèches.

Suite complément sur les BNs :

1. **Cas convergent** : si je ne sais pas qu'il y a "Alarme" (Z), je ne sais rien sur le "Tremblement" (X) ou sur le "Cambriolage" (Y).
 - A priori, pas de lien entre "Tremblement" (X) et "Cambriolage" (Y),
 - Mais, si je sais "Alarme" (A), je peux penser qu'il y a eu "Cambriolage" (Y),
 - **Circulation X-Y** : et si j'apprends "Tremblement" (X), **je suis rassuré** sur "Cambriolage" (Y)
 2. **Cas Série** : si "Ensoleillement" (X), je sais "Récolte" (Z) et donc baisse du "Prix du blé" (Y).
 - Ce n'est pas une circulation d'info entre X-Y, on a suivi les flèches.
 - **Circulation X-Y** : Mais si je sais l'abondance de la "Récolte" (Z), connaître l'"Ensoleillement" (X) **ne m'apprend rien** sur "Prix du blé" (Y)
 3. **Cas divergent** : si "ma pelouse est humide" (X), j'ai tendance à croire que "Pluie" (Z) et donc que "pelouse voisin humide" (Y).
 - Ce n'est pas une circulation d'info entre X-Y, on a raisonné (mais pas suivi les flèches!)
 - **Circulation X-Y** : par contre, si je sais "Pluie" (Z), je sais que "pelouse voisin humide" (Y) et savoir que "ma pelouse est humide" (X) **n'y change rien (n'apporte rien)**.
- ☞ Néanmoins, vu l'impacte de "Pluie" sur les deux "Pelouse"s, une sorte de conséquence corrélée peut exister entre X et Y :
- si "Pluie" alors les deux "Pelouse"s sont mouillées même si la connaissance de l'une (X) n'apporte rien (de plus) sur la connaissance de l'autre (Y) sachant Z. L'indépendance ne veut pas dire "non corrélées"!

Deux types d'apprentissage Bayésiens :

- Supervisé : construit un modèle Bayésien qui permet d'expliquer la variable Cible par des variables explicatives significatives.

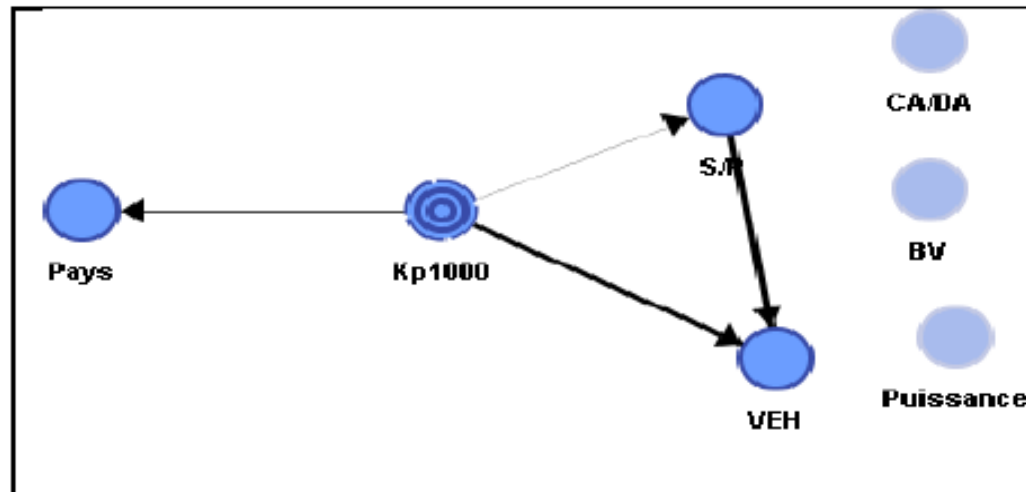
→ En d'autres termes, trouver les variables explicatives dont la connaissance rend la variable cible indépendante des autres variables.

- Non supervisé : exprime l'ensemble des relations entre toutes les variables (pas de notion de Cible, la variable Cible est une variable comme les autres).

- Les modèles Bayésiens mettent en valeur des **interactions** entre variables.

☞ Revenons à Renault!

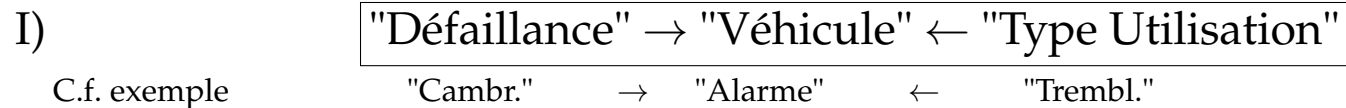
Résultats d'un apprentissage supervisé pour la défaillance mécanique



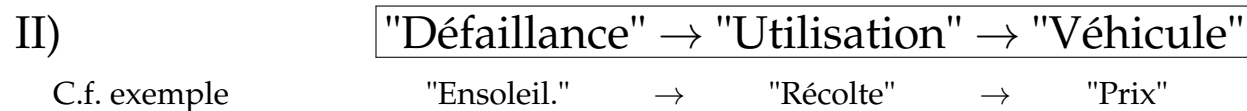
- On constate (ici, *kp1000* est la *défaillance* anonymisée) :
 - ➔ L'influence des 3 variables sur la défaillance : "type véhicule", "pays", "type utilisation".
 - ➔ La structure en V converge vers "type Véhicule" et lie deux variables "défaillance" et "type utilisation" (S/P) et montre **une interaction** entre "type utilisation" et "Véhicule".
- ☞ C-à-d : l'impacte de "type utilisation" sur le taux de "défaillance" dépend (de la connaissances) du "type Véhicule" (cf. cas *Convergent* dans BN à rapprocher de l'exemple *Alarme*).

Explications à propos de ce BN :

On se concentre sur le triplet "défaillance", (type) "Utilisation" et (type) "Véhicule".

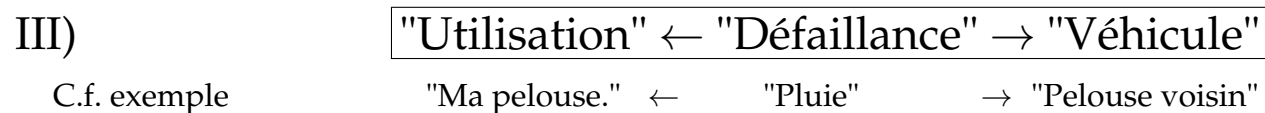


→ Si "Véhicule" est connu, on aura l'impact de "Utilisation" sur "Défaillance" (et vice versa)



→ La connaissance de "Utilisation" rend "Défaillance" et "Véhicule" indépendants.

→ C-à-d., connaissant "Utilisation", le fait de connaître "Défaillance" n'apprend rien sur "Véhicule".



→ La connaissance de "Défaillance" rend "Utilisation" et "Véhicule" indépendants.

→ C-à-d., connaissant "Défaillance", le fait de connaître "Véhicule" n'apprend rien sur "Utilisation" (et vice versa).

→ Néanmoins, en particulier dans le cas non-supervisé, la connaissance de "Défaillance" produit un impact corrélé sur "Utilisation" et "Véhicule" (cf. BN non-supervisé plus loin).

☞ Ces (mêmes) résultats ont été constatés (trouvés) par la régression logistique précédente.

- Par contre, le modèle Bayésien ne détecte pas la relation entre la modalité "BVA" de la variable "type Boite" et la modalité "V5" de la variable "type véhicule".

→ La raison (due à l'algorithme habituel de construction de BN) :

Un BN n'établit des liens entre deux variables que si **la majorité** de leurs modalités sont en relation.

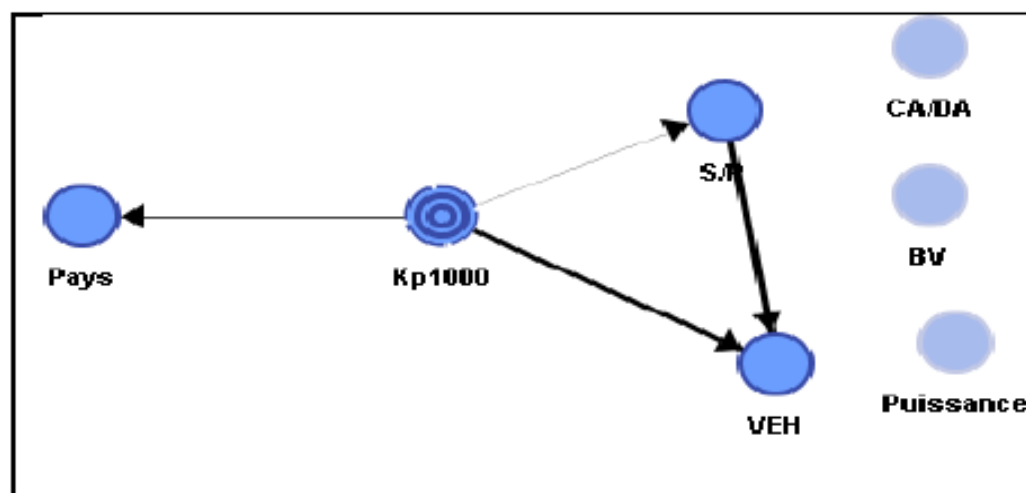


FIGURE 1.2 – Rappel du BN supervisé

Cas d'apprentissage non-supervisé de BN :

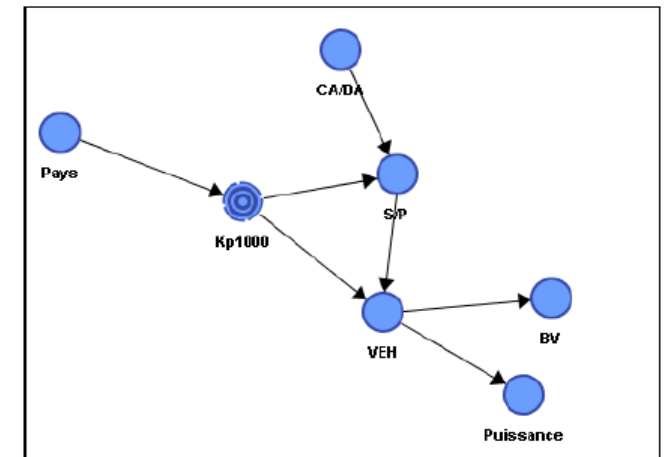
- Ce modèle montre les relations entre toutes les variables (explicatives et cible).

- Par exemple, dans la structure divergente *Véhicule/BV/Puissance* :

☞ il y a une corrélation entre BV et Puissance (sachant Véhicule).

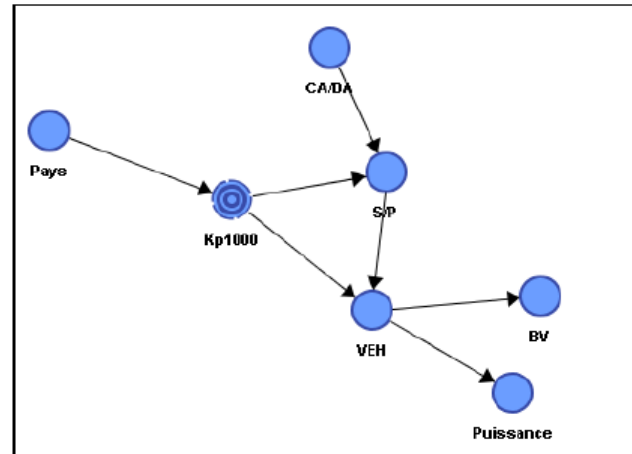
➔ Cette corrélation vient du "type véhicule" :

le véhicule "V1" est équipé d'une boîte *BVA* et d'une puissance pw_1 .



☞ : la corrélation ne contredit pas l' "Indépendance" (cf. schémas des BN, cigognes et bébés!).

☞ On trouve les mêmes résultats dans l'apprentissage supervisé : les 3 variables explicatives les plus influentes sur la défaillance ("type utilisation", "type véhicule" et "pays") et la question de leurs interactions.

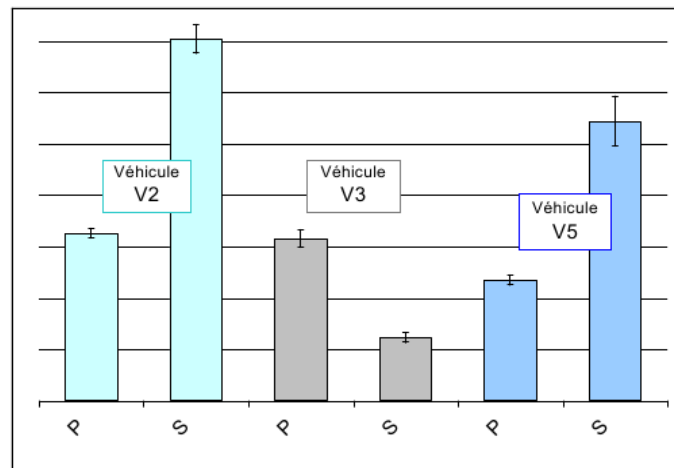


Les BNs : pro & Cons

- Les BN constituent un outil intéressant pour la modélisation des données.
- Cependant, l'absence de lien (arc dans le graphe) entre deux variables n'indique pas l'absence de lien entre certaines modalités des variables.
- En outre, les BNs (naifs) sont insuffisants dans le cas de variables cibles multiples mais indépendantes.

1.3.7 Utilisation conjointe des deux méthodes

- 1- On peut utiliser les BN non supervisés pour identifier les corrélations entre les variables explicatives et ainsi désigner les **moins corrélées**.
- 2- Ensuite, utiliser les BN supervisés pour trouver les variables les plus influentes (sur la cible).
- 3- Puis, utiliser la régression logistique pour identifier les relations significatives entre les modalités (point faible des BNs) et quantifier les effets de ces variables sur la variable cible
- Et pour identifier les **interactions** entre les variables explicatives, comme dans :



Conclusions de l'application de la démarche à la BD Renault :

- Le modèle *BN non supervisé* n'a pas retenu de corrélations significatives
 - on conserve donc l'ensemble des variables ;
- Le modèle *BN supervisé* permet d'identifier les variables "type utilisation", "type véhicule" et "pays" comme les plus significatives sur la cible
 - Et d'identifier l'interaction "type utilisation" et "type véhicule" (figure ci-dessus) ;
- La *régression logistique* permet de quantifier les variables significatives sur la cible (figure 1.1 de la section 1.3.4).

Aussi, elle permet d'identifier et de quantifier les relations entre les modalités "BVA" et "V5".

Fin exemple (thanks to Renault Rueil Malmaison)

1.4 Propos et Motivations de calcul de Fiabilité

- Utilisation des données de Fiabilité issues de retour d'expérience (REX) dans des fonctions de sécurité, fonctionnement, survie, ...
- (Aperçu des) outils et méthodes pour utiliser ces informations de manière optimale dans un souci de sécurité
- On procédera par :
 - Aperçu des notions fondamentales de **sûreté de fonctionnement**
 - Proposition de modèles utiles au calcul du taux de défaillance en fonction des données disponibles
 - Approche globale pour la détermination des facteurs influents

1.5 Contexte de la fiabilité

- **Maîtrise des risques industriels :**

- Les règlements de tous genres poussent les industriels à s'assurer de la sûreté de fonctionnement (SDF).

- Protection d'environnement, les directives **Sevesos** diverses

- cf. : soupape de sécurité

- Ces règlements : **Frein ou Atout?** → atout si bien utilisés.

- ☞ Gestion / prévision des risques → prévision des risques de non fonctionnement

- amélioration de la **productivité**.

- ☞ Mise en place des **barrières de sécurité** (de nature humaine ou techniques) pour assurer une prévention efficace des risques dans l'entreprise.

- ☞ Maîtrise des risques des installations industrielles.

Nécessité et difficultés d'évaluation de la fiabilité :

- **Pour évaluer une barrière de sécurité** (qualitative et quantitative)
 - **il faut connaître sa fiabilité**
- **Mais** on constate que pendant long temps, les industries ont négligé cela (sauf dans certains secteurs *sensibles* comme l'*aéronautique*, plus généralement en transport) car :
 - Le **REX** interne se fait rare et négligé,
 - **Peu diffusé** (si présent) du fait des enjeux économiques (et les coûts) engendrés.
- **Heureusement**, la situation s'améliore... et
de nos jours, il existe des BDs (BDF) sur le marché qui permettent de trouver des informations intéressantes (où le contexte d'utilisation est très important)

1.5.1 *L'apport des BDFs*

- En **électronique** : bonnes BDFs

- données REX et des modèles de fiabilité prévisionnels bien établis
- causes : production en masse, standardisation de la production

- En Systèmes **mécaniques** :

- Tendance : BDs de synthèse des données de fiabilité d'équipements **similaires**.

- En Systèmes **électro-mécaniques** : **problèmes**!

- **aucune/très peu de** méthode commune de prédiction de fiabilité n'existe (*de facto*)
- **grande dispersion** des taux de défaillance (même pour des composants apparemment similaires)

1.5.2 Difficultés inhérentes à la mécanique

- Un équipement mécanique est **composé** de plusieurs composants :
 - Utilisés de manières **diverses** : multitude des modes de *défaillance*
 - Assurent souvent une **fonction** → utilisés pour des objectifs différents.
 - Selon leur utilisation, les défaillances ne seront pas les mêmes.
- Le taux de défaillance des **composants** mécaniques sont rarement modélisables par des taux **constantes** à cause des mécanismes de **dégradation** auxquels ils sont soumis :
 - **conditions** de fonctionnement, taux d'utilisation, modes de fonctionnement, fatigue, vibrations, stress, etc.
 - le **mélange** de divers taux rend la prédiction difficile.

Autres facteurs dans une modélisation numérique de la fiabilité mécanique :

- Rareté de données (de qualité) de défaillance pour des composants moins "std" utilisés dans des applications spécifiques
 - Récupération de REX difficile, données rares
 - Le coût supérieur des composants mécaniques (vs. électroniques) et leur production restreinte
 - REX plus rare avec moins de conséquence, ...
 - Dans les installations à risque, la **maintenance préventive** est assez efficace :
 - les défaillances pendant une phase de fonctionnement sont moins fréquemment constatées.
 - Pourtant, l'étude de fiabilité a toujours été importante :
 - Il existent des outils d'analyse : cf. **AMDEC** (*analyse des Modes de Défaillance*, leurs effets et leurs Criticités.)
 - On propose une "garanti" et on procède à une maintenance préventive (suivant la sensibilité).
- ☞ Vers la "modernisation" (Digitalisation + ML + ...)

1.5.3 Exemples de mode de défaillance

Liste de modes de défaillance selon l'AFNOR : modes génériques de défaillance

- | | |
|---|---|
| 1. Défaillance structurelle | 1. Ne s'arrête / démarre / commute pas |
| 2. Blocage physique ou coincement | 2. Fonctionnement prématuré |
| 3. Vibrations | 3. Fonctionnement après le délai prévu (retard) |
| 4. Ne reste pas en position | 4. Entrée erronée (augmentation/diminution) |
| 5. Ne s'ouvre / ferme pas | 5. Sortie erronée (augmentation/diminution) |
| 6. Défaillance en position ouverte / fermée | 6. Perte de l'entrée/ sortie |
| 7. Fuite interne / externe | 7. Court-circuit (électrique) |
| 8. Dépasse la limite supérieure / inférieure tolérée | 8. Circuit ouvert (électrique) |
| 9. Fonctionnement intempestif / intermittent / irrégulier | 9. Fuite (électrique) |
| 10. Indication erronée | 10. Autres conditions de défaillance exceptionnelles suivant les caractéristiques du système, les conditions de fonctionnement et les contraintes opérationnelles |
| 11. Écoulement réduit | |
| 12. Mise en marche erronée | |

1.5.4 Les pratiques pour le calcul de la fiabilité

- Données : les "retours atelier" constituent la source d'information (voir les *censures*).

→ Pratique non systématique !

- Calculs : deux pistes utilisées : **Décomposition et Mimétisme**

Décomposition : la *décomposition naïve* d'un équipement complexe n'est pas une bonne méthode de prédiction de la fiabilité de l'ensemble :

- Car les composants ne suivent pas tous le même **régime de dégradation**,
- **N'ont pas la même distribution** en terme de loi de fiabilité.
- Ont parfois des effets mutuels, **mais** connaître et combiner toutes les fiabilités des différents composants devient rapidement trop conséquent en temps et donc en **coût**.
- Ex : clim. réversible, hydraulique des Citroëns, etc.

Par mimétisme :

- L'étude des matériels similaires est une indication mais ne donne pas de résultats précis.
- Une bonne méthode d'analyse a aussi besoin de données (propres, non mimétiques) en entrée.
 - L'utilisation des données ReX devient importante.

A propos de la décomposition :

- On décompose pour mieux trouver des caractéristiques ("features", sous-ensemble de variables explicatives) avant de les "recombinaison" dans les calculs !
 - Mais, que fait-on des interactions entre les composants, leurs lois,... les connaît-on ?
- ☞ (En Apprentissage,) savoir choisir les "features" est une étape primordiale.
 - L'utilisation des données ReX est dans le cas des systèmes complexes (composés) également importante.
 - Parfois, mieux vaut ne pas décomposer : laisser le système d'apprentissage trouver les "features" !
 - cf. Les RNs.

Plus récent (et de plus en plus) :

appel à l'apprentissage automatique (et statistique)

Objectif : calculer des taux de **défaillances** spécifiques au matériel mécanique et définir les facteurs **influen**ts sur la fiabilité.

Déterminer la probabilité d'occurrence des modes de défaillance observées.

- On utilisera des données REX, plus pessimistes que les données car constructeurs
 - testés dans des conditions "saines" (plus réalistes mais plus difficiles à traiter).
 - rend le contexte plus réaliste mais augmente les difficultés.
- Ici, les modèles de décomposition / similarité peuvent aider (voir plus loin)
 - Pour trouver une distribution, générer des données (Méthodes statistiques)
 - MCL (pour compléter, voir annexes chapitre 1)

1.5.5 *Plan sommaire de la suite de cette séance*

- Quelques notions indispensables à la compréhension du reste ...
 - ➔ Définitions des domaines, concepts, notions relatives au REX
 - ➔ Différentes notions nécessaires à la modélisation de la fiabilité
- Méthodes d'évaluation d'un équipement : Modèle statistique de **vie accélérée**
- Données de Fiabilité disponibles et leur utilisation
- Modélisation Bayésienne
- D'autres méthodes (Hasard proportionnel, RN, ...)
- Application à un exemple : **soupape de sûreté**.

1.6 Généralités sur le calcul de la Fiabilité

- Cadre général de l'étude de la fiabilité : **sûreté de fonctionnement (SdF)**.
- Un ingénieur en SdF évalue les performances des barrières de sécurité à travers l'analyse de 3 critères : l'**Efficacité**, le **Temps de Réponse** et le **Niveau de confiance**
- La plus difficile : quantification du niveau de confiance :
 - Il faut savoir quantifier la probabilité d'occurrences des états de **défaillance**
- Objectifs de la **sûreté de fonctionnement (SdF)** :
 - FDMS = **Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité, Sécurité**
 - L'ingénieur doit modéliser ces 4 objectifs de la **SdF**.
 - Il peut disposer des données précises en entrée, comme le taux de défaillance
 - (obtenu par les calculs d'un modèle sur la base de REX + BDFs).

1.6.1 Quelques définitions

- **Fiabilité** : *aptitude à bien accomplir une fonction dans des conditions données, sur un intervalle de temps donné*
 - ➔ Notion de probabilité de Fiabilité = probabilité de ce comportement.
- **Maintenabilité** : *aptitude à être maintenu ou rétabli, sur un intervalle de temps donnée dans un état où l'on peut accomplir une fonction requise.*
 - ➔ Conditions de maintenance, procédure et moyens
- **Disponibilité** : *aptitude d'un matériel, sous les aspects de sa fiabilité et d'organisation de maintenance, à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions de temps déterminé.*

1.6.2 Cycle V et les phases de Fiabilités

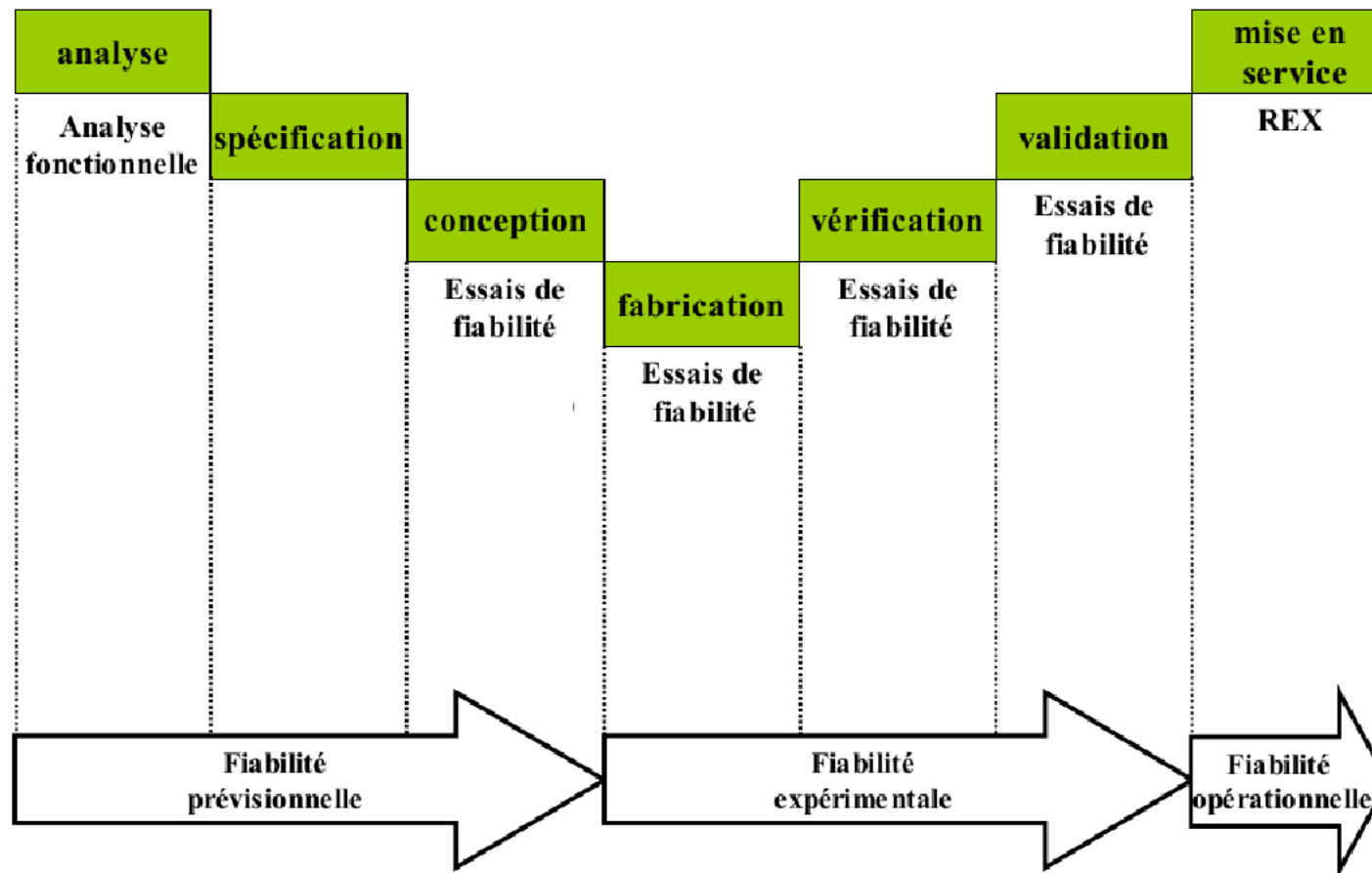


FIGURE 1.3 – Méthodes d'évaluation pendant les trois différents niveaux de l'évaluation de la fiabilité tout au long du cycle de développement.

N.B. : domaines **Logiciel**, **Électronique**, **Mécanique** , **Mécatronique**

Cycle V et les méthodes associées à la fiabilité **Prévisionnelle**

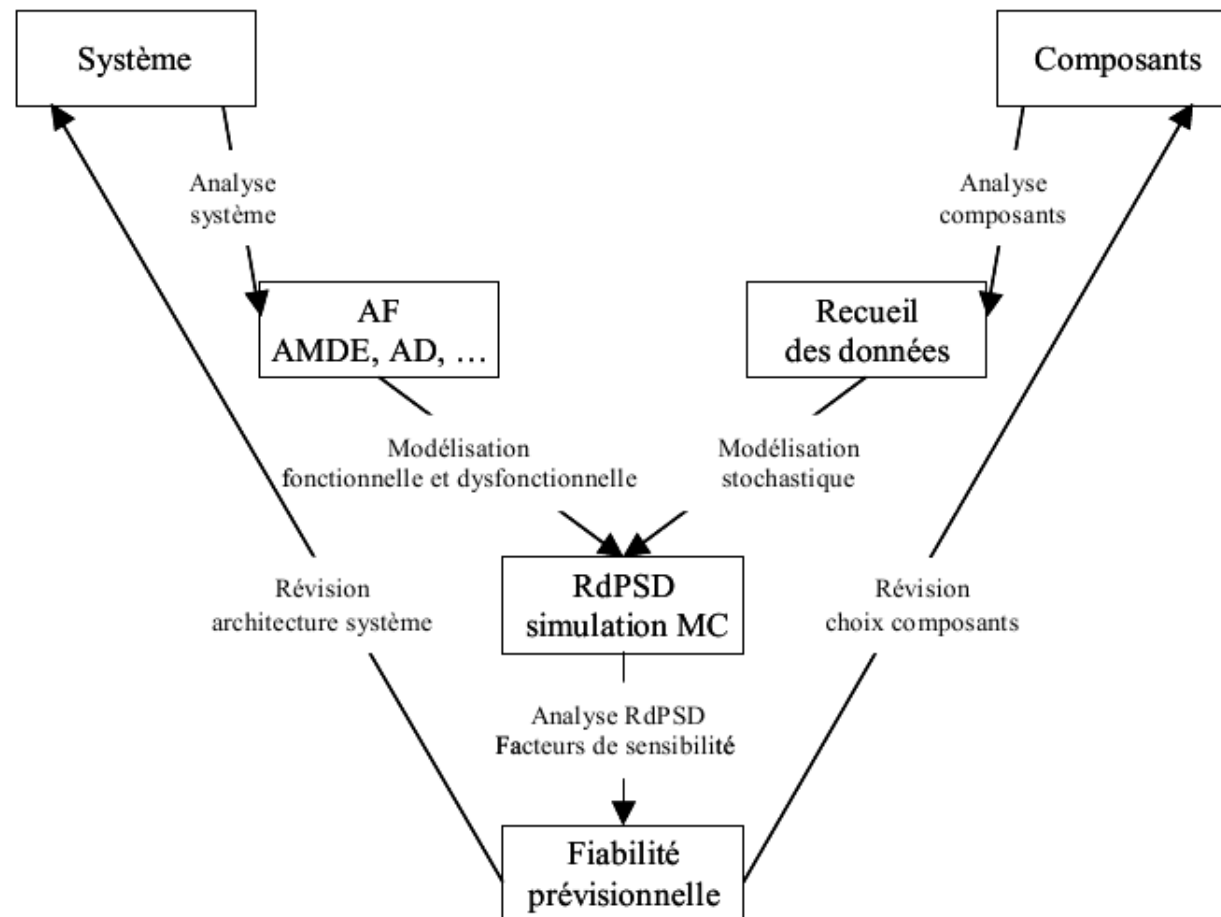


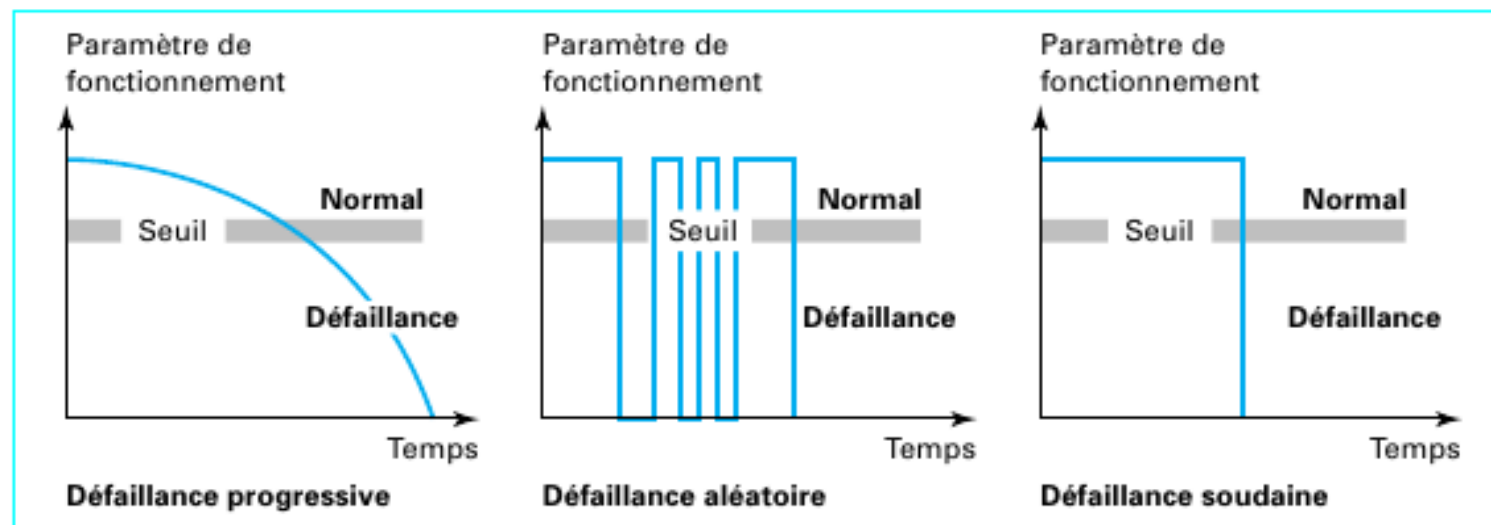
FIGURE 1.4 – Démarche de la fiabilité Prévisionnelle

RdPSD (Réseaux de Petri Stochastiques Déterministes), **AF** (Analyse Fonctionnelle),
AMDE (Analyse des Modes de Défaillance), **MC/MCL** (Monte Carlo).

1.7 Différents types de données (tests, REX , ...)

On s'intéresse aux défaillances et aux moments où elles interviennent.

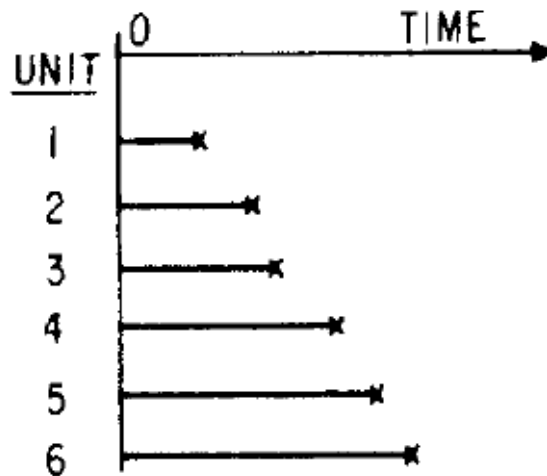
→ Quelques schémas courants de défaillances :



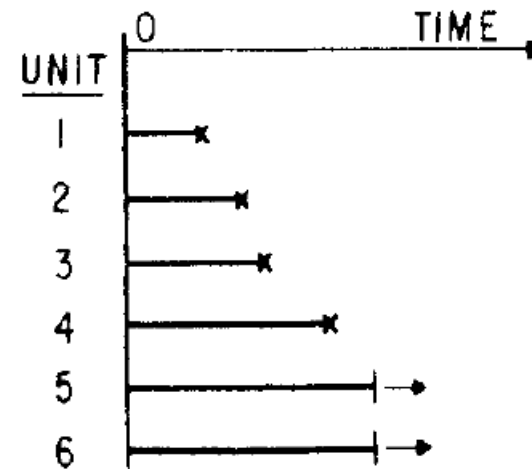
→ On détaille ces différents types de défaillances en annexes.

Les données :

- Les données peuvent être **complètes** ou **censurées** :
 - **Complète** : on relève tout, jusqu'à la panne de tous matériels (peut être long)
 - les instants de défaillance de chaque unité de l'échantillon sont connus
 - **Censurés** : arrêt au temps t où **toutes** les unités testées ne sont pas tombées en panne.
- Exemples :

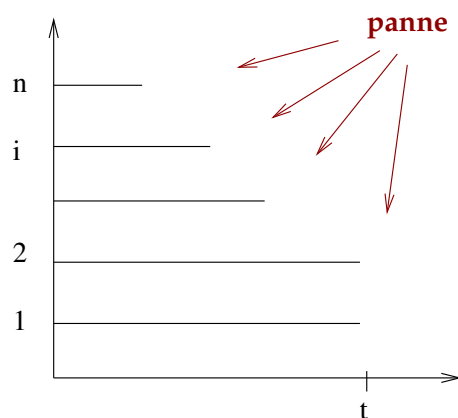


Données complètes (tous en panne)

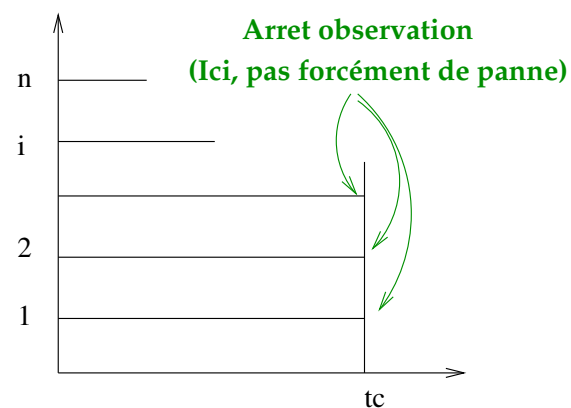
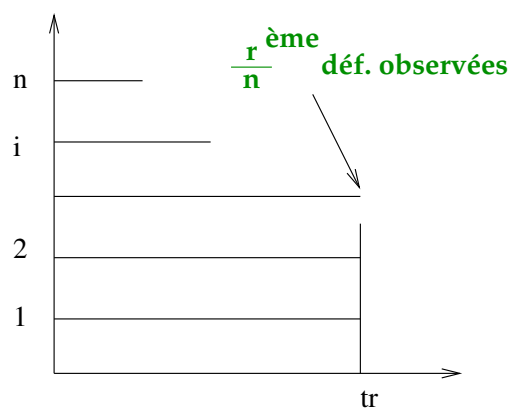


Censurées avec 4 pannes (arrêt au temps t)

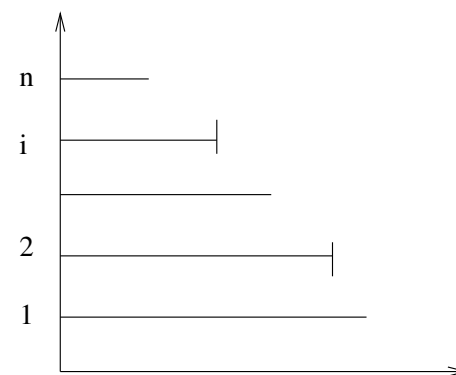
Aperçu de quelques types importants de données **censurées** (voir annexes) :



(a) Echantillon complet

(b) Echantillon censuré sur t_c à droite

(c) Censuré sur rème défaillance



(d) Censuré aléatoirement à droite

→ Parfois, les données sont censurées multiples.

Dans le cas du REX

- On a souvent affaire à des données **censurées à droite** :
 - cas (b) : à la date d'observation, le matériel a-eu / n'a-pas-eu de défaillance.
- N.B. : la maintenance préventive (remplacement du matériel supposé être dégradé mais la dégradation pas forcément observée) génère des données censurées à droite.
 - **Pièce remplacée** : sa défaillance ou non est une information.
- Les **dates** sont souvent référencées par rapport à une origine connue :
 - **MSI** (mise en service industriel), date de remplacement, etc.
 - Cette date n'est pas forcément la date de naissance réelle du matériel.
 - Le temps obtenu est en général la différence entre deux dates.
- Autre unités : **unité d'usage** : nombre de cycles, nbr de sollicitations, etc...

1.8 La maintenance : un élément important

- Modifie les données et les caractéristiques de fiabilité (temps, nature, occurrence, gravité, etc).
- La maintenance peut amener à d'autres défaillances non intrinsèques :
 - mauvais démontage/remontage, détérioration des pièces, ...
- 2 types principaux de maintenances : **corrective** (réparation de panne) et **préventive** :
 - La **Maintenance Corrective** ne pose pas de problème particulier au ReX.
 - La **Maintenance Préventive** augmente la durée de vie *mais fausse* les résultats observés.
 - ➔ Les données de REX deviennent censurées à droite (en maintenance préventive).
- Pour une analyse, il faut obtenir des informations sur les maintenances
 - ➔ (type, lieu, date, raisons, détails déroulement, etc.)
- Voir les Annexes pour plus de détails.

1.9 Notions relatives à SdF : MTTF, MTBF, MUT, MDT, MTTR

- Notions de temps relatives à la maintenance

MTTF : Mean time to failure = temps moyen de bon fonctionnement jusqu'à l'apparition de la 1^{re} défaillance (ou la défaillance pour un produit **non réparable** comme une ampoule).

MTBF : Mean time between failures : moyenne du temps de bon fonctionnement entre deux pannes (pour un produit **réparable**).

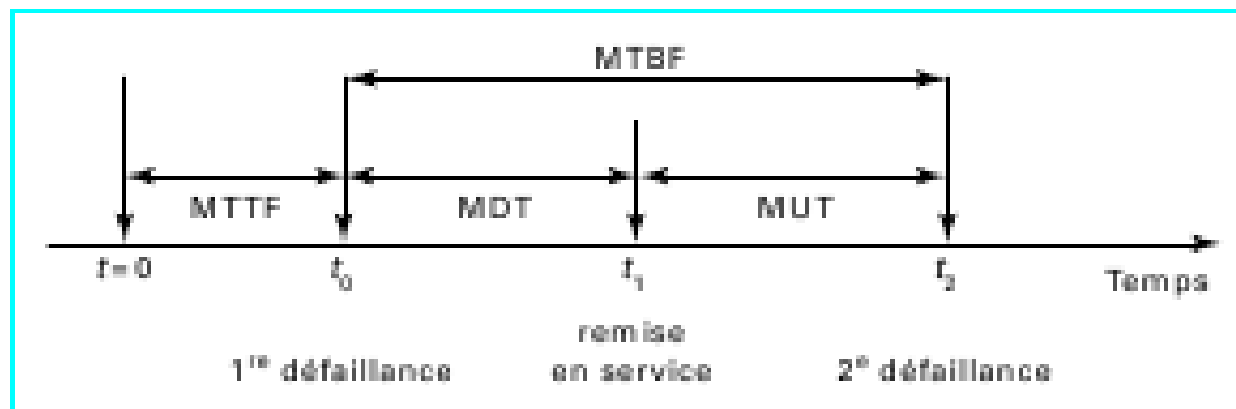
MTTR : Mean time to repair : moyen du temps de réparation
= durée moyenne jusqu'à la réparation d'une unité réparable.

MDT : Mean down time : la moyenne des temps d'arrêt

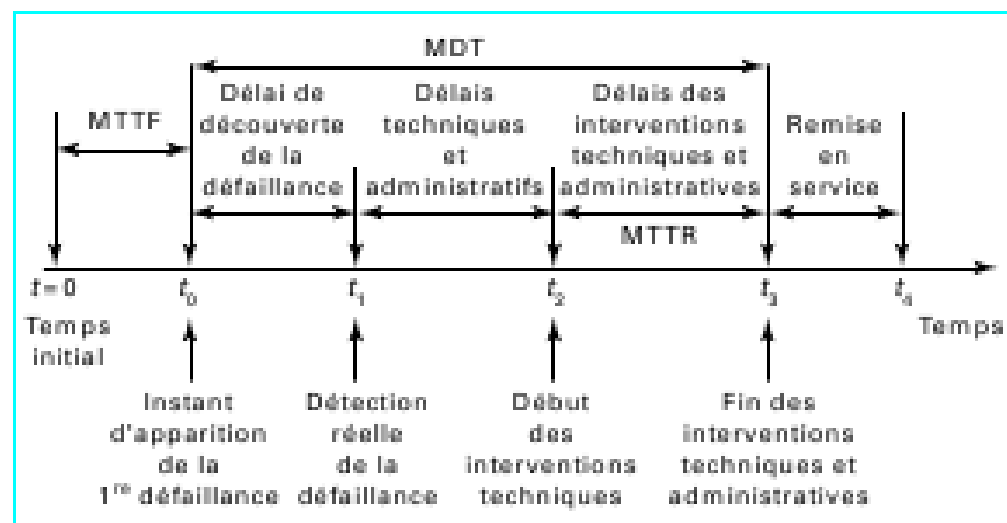
MUT : Mean Up time : moyenne des temps de (re) fonctionnement

- La **taux de défaillance constante** = $1/\text{MTTF}$.

- Les schémas suivants montrent ces relations (MTTR dans la 2e figure) :



Détails MDT :



Remarques et exemples :

- MTTF est plus adapté à un matériel **non réparable** \sim durée de vie
- MTBF aux **réparables** : si le MTBF (θ) est connue, alors le taux de défaillance ($\lambda = 1/\theta$)

Exemple : on achète une ampoule électrique dont MTTF=1000 heures,

- C-à-d. : 1/1000 chance (moyenne) de tomber en panne à la 1e h., 2/1000 à la 2e heure, etc.
 - Signifie (**aussi**) qu'en moyenne, si 1000 produits sont en circulation, l'un d'entre eux tombe en panne après *une heure* (indép. de la loi de distribution de la défaillance F)!
 - Si la défaillance du produit (supposons réparable!) devait suivre une distribution *exponentielle*, alors en moyenne, 63% des produits seront en panne après 1000 heures (vs. 50% si loi uniforme)!
 - Car (voir plus loin la loi de fiabilité exponentielle $R(t) = \exp(-t/\theta)$) :
- $$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{MTBF}\right)} \text{ et avec } t = MTBF, R(t) = e^{-1} = 0.3677, \text{ d'où } F(t) = 1 - R(t) = 0.63.$$
- Voir un autre exemple en annexes.

1.10 Distributions de survie

1.10.1 Fonction de répartition cumulée de défaillance

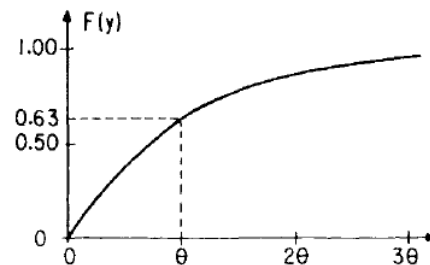
- Notée $F(t)$ = la proba d'avoir au moins une défaillance avant le temps t .

Si T = var aléatoire caractérisant **l'instant de défaillance** : $F(t) = Pr(T \leq t)$

- **Estimation de F** : par différentes méthodes (voir Annexes).
- $F(t)$ est une **CDF : Fonction de distribution cumulative**.
- $F(t)$ pour une distribution continue avec une densité de proba $f(t)$ est estimée par :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(u) d(u) \quad -\infty < t < \infty$$

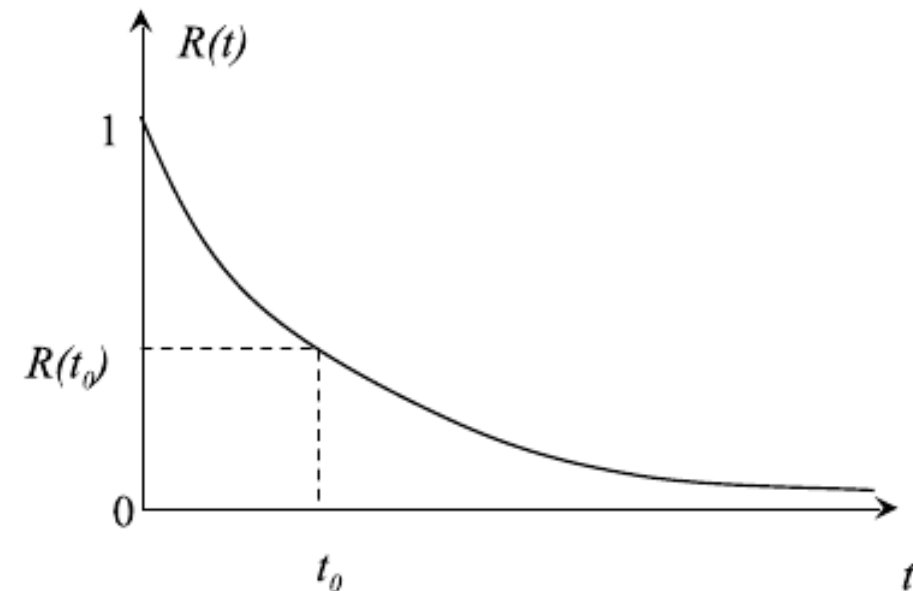
- **Exemple de la CDF exponentielle :**



1.10.2 Fonction de Fiabilité

- Notée $R(t)$, appelée aussi **survivance** ou **fonction de survie**
 - = la probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant la période $[0, t]$
 - = la probabilité de ne pas échouer (donc de survivre) jusqu'à t
- C'est un complément de la fonction de répartition cumulée ($F(t)$).
 - Si T = la var aléatoire caractérisant l'instant de défaillance, on a : $R(t) = 1 - F(t) = Pr(T \geq t)$
 - Pour une loi de défaillance exponentielle :
$$R(t) = 1 - F(t) = \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \quad t \geq 0$$

→ Voir ex. ventilos plus loin.



Courbe de survie ou de Fiabilité (loi exponentielle)

1.10.3 La densité de défaillance

- Représente la **densité de défaillance** (à ne pas confondre avec le *taux de défaillance* $\lambda(t)$)
- Notée $f(t)$ correspond à la dérivée de $F(t)$ et représente la probabilité de la défaillance d'un élément à l'instant t . On a :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

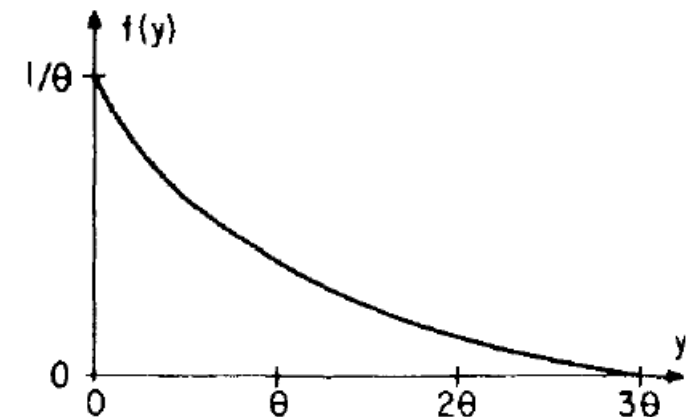
- Habituellement, on n'emploie pas directement $f(t)$ mais son intégrale $F(t)$ qui est la fonction cumulée de densité de proba (CDF).

$f(t)$: PDF of failure ,

$F(t)$: CDF of failure ,

$R(t) = 1 - F(t)$: CDF of survival

Densité de probabilité Exponentielle



Cas de $f(t)$ Exponentielle :

Consiste en des valeurs $t \geq 0$ et une densité de probabilité : $f(t) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{t}{\theta}) \quad t \geq 0$.

- Le paramètre $\theta \geq 0$ (de la même nature que t) est appelé **la moyenne de la distribution**.
- Exemple de densité de proba de la distribution continue *exponentielle*. On a :

$$\rightarrow f(t) \geq 0$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{t}{\theta}) dt = 1$$

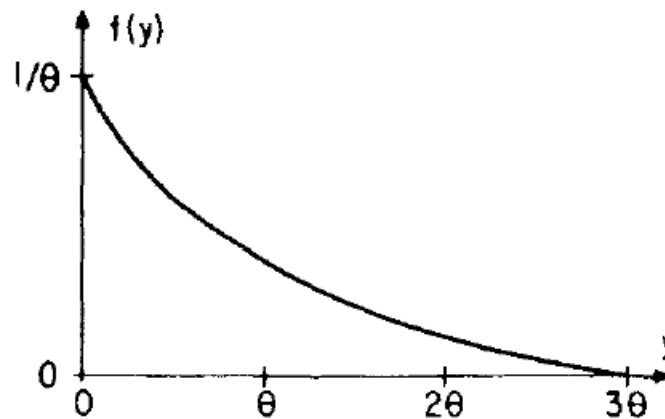
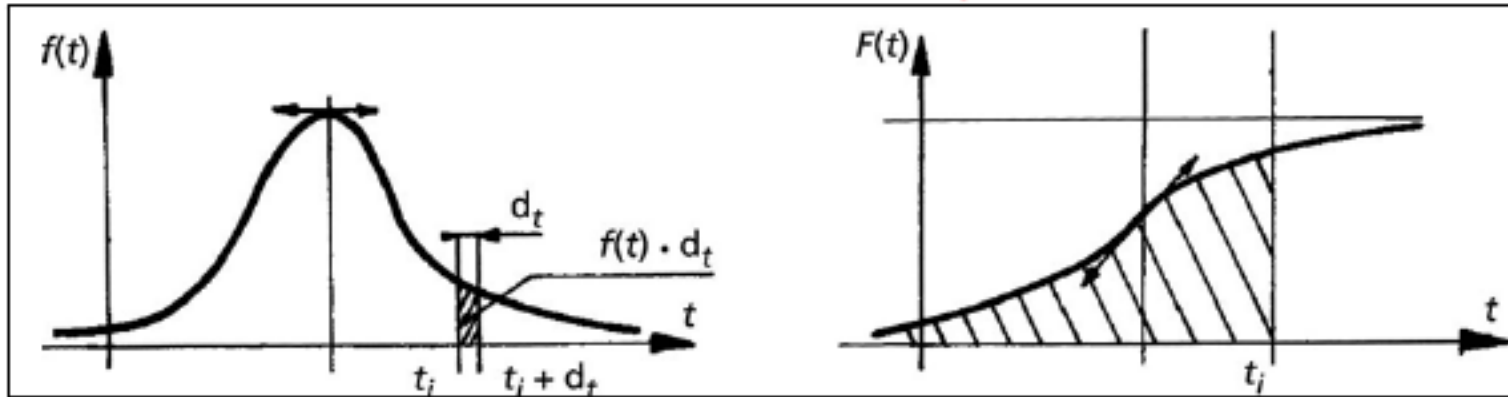


FIGURE 1.5 – Exemple de densité de probabilité Exponentielle

A propos : $F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t) dt$

→ $F(t)$ = la probabilité de subir une défaillance à l'instant T compris entre $[0, t]$

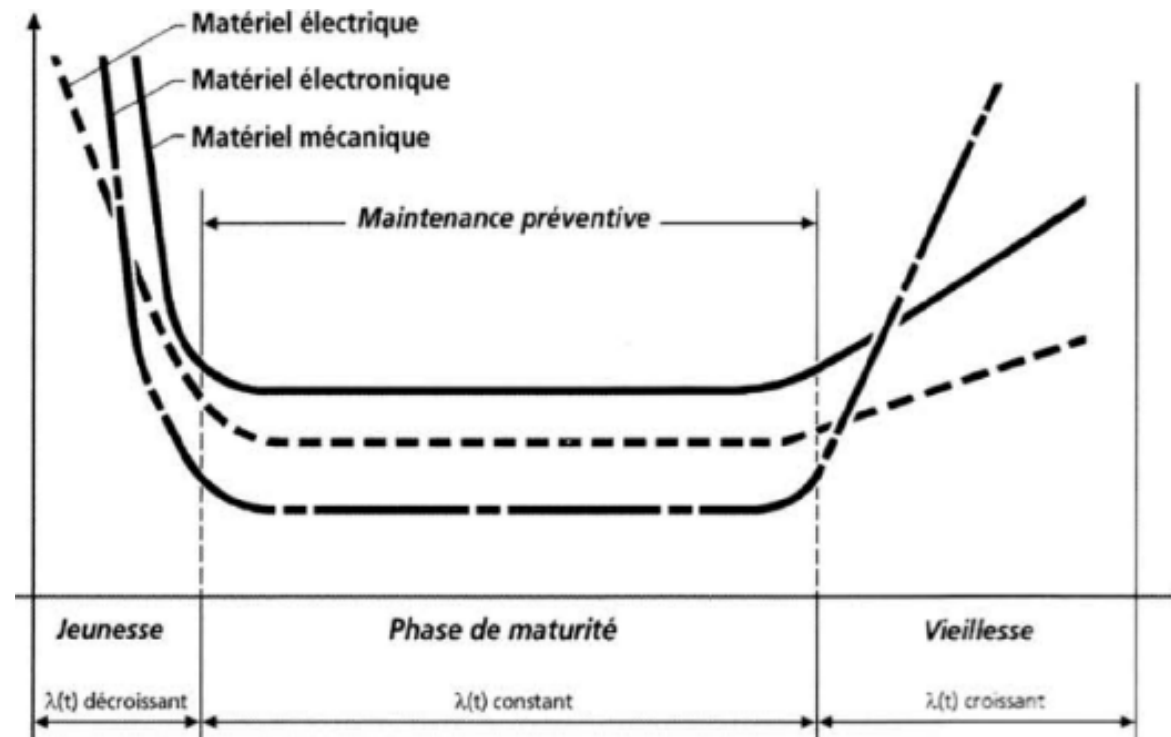


- La variation (λ constante pendant la *maturité*)

$$\lambda(t) = \frac{\text{nbr. défaillance sur un intervalle de temps}}{\text{nbr. de survivants au début de période} \times \text{intervalle de temps}}$$

représente l'évolution de cycle de vie des équipements.

- Quelques courbes de défaillance (et l'évolution de $\lambda(t)$) selon le type du matériel.



1.10.4 Exemple loi exponentielle : ventilateurs

- Une distribution exponentielle avec la moyenne $\theta = 28,700$ heures a été utilisée pour décrire le nombre d'heures jusqu'à la panne des ventilateurs des moteurs Diésels (sur véhicules).

→ Le taux de défaillance est $\lambda = 1/\theta = 1/28700 = 34.8$ défaillances par millions d'heures.

- La probabilité pour un ventilateur de tomber en panne sur **8000 heures de garantie** est

$$F(8000) = P(t \leq 8000) = \int_0^{8000} \frac{1}{28700} \exp(-t/28700) dt = 0.24$$

→ **24% de ces ventilos tomberont en panne pendant la garanti**, 76% survivront!

- La fiabilité pour 8000 heures est $R(8000) = \exp(-8000/28700) = 0.76 = 1 - F(t)$.
- Le taux élevé de pannes (24%) conduit le constructeur à décider de remplacer les ventilos par un modèle plus fiable.
- Voir aussi les exemples de la séance 1.

1.10.5 Le taux de défaillance instantané ou la fonction Hasard $\lambda(t)$

- C'est la fonction du taux de **défaillance (avarie)** instantané $\lambda(t)$ ou **la fonction du risque**.
- Permet d'observer la fonction de probabilité de défaillance au cours de très petites périodes (sous l'hypothèse qu'aucune défaillance ne s'est produite avant cette période).

$$\lambda(t)dt = \frac{\text{Prob(défaillant sur } [t; t + dt] \text{ sans défaillance sur } [0; t])}{\text{Prob(non défaillant sur } [0; t])}$$

$$\lambda(t)dt = \frac{\text{Prob(défaillant sur } [0; t + dt]) - \text{Prob(défaillant sur } [0; t])}{\text{Prob(non défaillant sur } [0; t])}$$

- $\lambda(t)$ est la proba d'être défaillant pendant un instant Δt , à cond. de ne pas l'avoir été jusqu'à t .

On a

$$\lambda(t) = \frac{F(t + dt)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{-1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{d(t)}$$

On en déduit : $R(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(u) \cdot d(u) \right]$

- **Pour le cas exponentiel** : $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda \exp(-\frac{\lambda}{t})}{\exp(-\frac{\lambda}{t})} = \lambda$ **constante**.

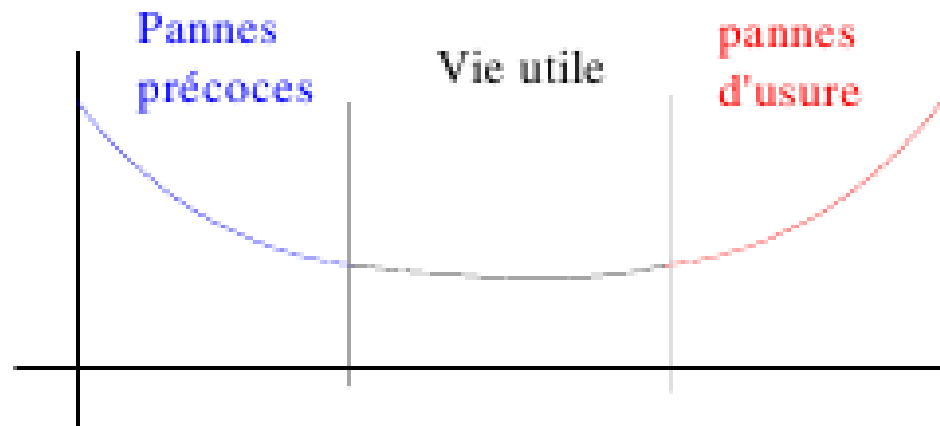
- On peut trouver $\lambda(t)$ si l'on connaît $F(t)$ ou $R(t)$.
- Réciproquement, on peut obtenir $R(t)$ et $F(t)$ à partir de $\lambda(t)$.

$$\rightarrow \frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} = -\lambda(t) \Rightarrow R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)$$

et

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)$$

- De manière empirique (expérimentale), $\lambda(t)$ a une forme de baignoire :



Complément : la norme NF (EN 13306) définit le taux de défaillance λ :

"la fréquence d'apparition de la défaillance d'un élément, par période individuelle successives, après que l'élément ait fonctionné jusqu'à un certain temps".

- On distingue :

λ : taux de défaillance en fonctionnement

λ_a : taux de défaillance à l'arrêt

γ : taux de défaillance à la sollicitation

μ : taux de réparation

- On distingue également 3 variantes de λ : défaillance dangereuse (λ^D), sûre (λ^S) et sans incidence sur la sécurité (λ^0).

→ Ces 3 taux sont déclinés en version détectée / non détectée.

1.10.6 Relations entre R , F , f et λ

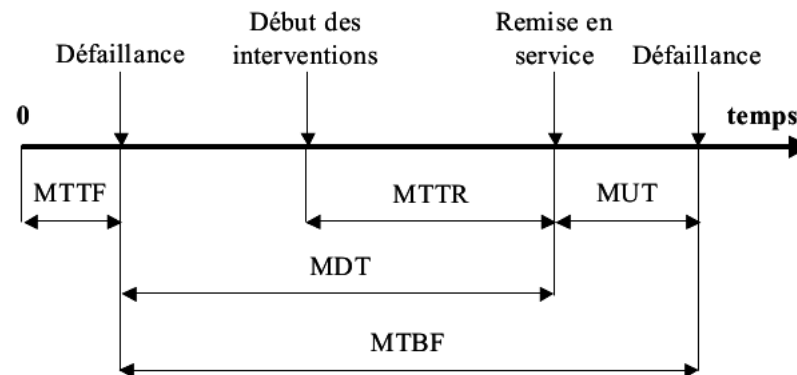
Fonction	$F(t)$	$R(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$F(t)$		$1 - R(t)$	$\int_0^t f(u) du$	$1 - \exp - \int_0^t \lambda(u) du$
$R(t)$	$1 - F(t)$		$\int_t^\infty f(u) du$	$\exp - \int_0^t \lambda(u) du$
$f(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$-\frac{dR(t)}{dt}$		$\lambda(t) \exp \int_0^t \lambda(u) du$
$\lambda(t)$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}$	$-\frac{R'(t)}{R(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u) du}$	

1.10.7 Relations avec les métriques de la SdF

- **MTTF** (Mean time to Failure) : $MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) d(t)$ (avec $\int_0^{\infty} f(t) d(t) = 1$),

Ou
$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) d(t)$$

- **MTTR** (Mean time to Repair)
- Relation entre : **MUT** (Mean Up time), **MDT** (Mean Down time), **MTBF** (Mean time Bet. Failure) avec $MTBF = MDT + MUT$:



- N.B. : **on peut exprimer MTBF comme la moyenne de la variable aléatoire T = espérance de vie du dispositif** : $MTBF = E(t) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} R(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt$

1.10.8 Exponentiel : un modèle courant de défaillance

- La loi **exponentielle** est généralement employée lorsque le taux de défaillance est **constant**.
- Pour la loi exponentielle : $\forall t \geq 0, \lambda(t) = \lambda > 0$ constante

et $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad R(t) = e^{-\lambda t}, \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

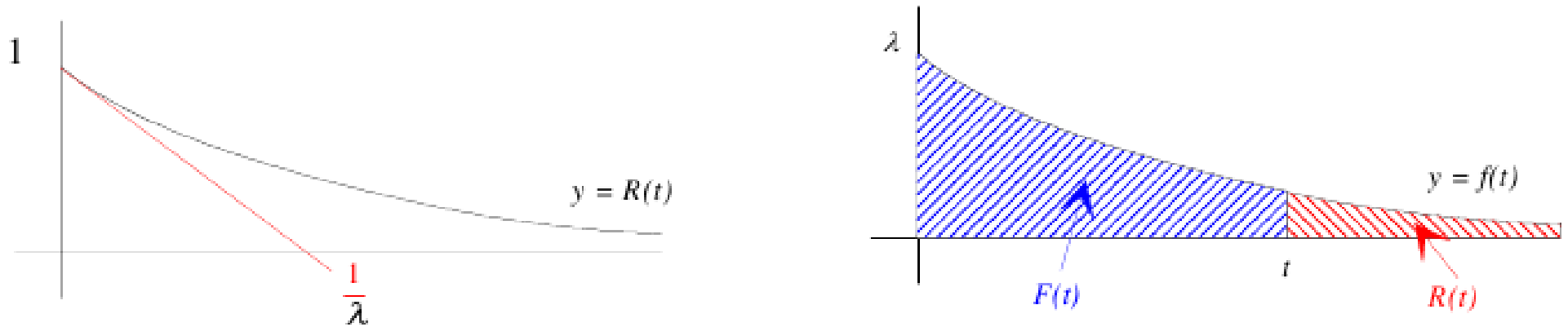


FIGURE 1.6 – Fig. droite : au temps t , $F(t)$ à gauche et $R(t)$ à droite (par déf.).

- Pour la loi exponentielle : $MTBF = E(t) = \frac{1}{\lambda}$
- ☞ Voir plus loin une autre loi importante (Weibull).

Remarque :

- On estime en général les courbes d'intervalle de confiance sur la fonction de **fiabilité**.
- Un exemple (3 visions de la distribution de $R(t)$ dont sa projection en 2D pour une confiance à 90%) :

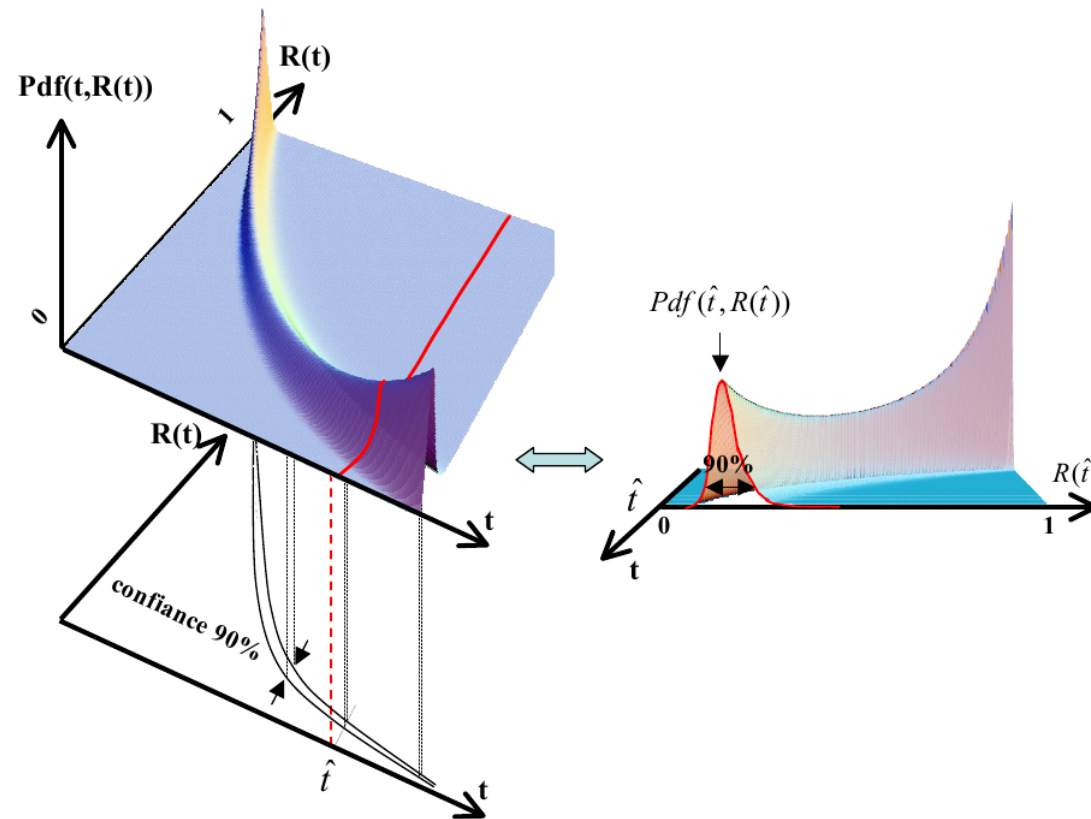


FIGURE 1.7 – Dans l'espace 2D, $R(t)$ décroissant avec le temps (t) exprimée sous forme d'interv. à 90%, \hat{t} = un opt. pour e.g. une garanti

→ suite : Distributions

1.11 Diagramme de Fiabilité (RBD) et calcul de fiabilité

- Diagramme de blocs de Fiabilité (*Reliability Block Diagrams*, RBD).
- Modèle graphique souvent utilisé.
- Représentation d'un composant dans un système :

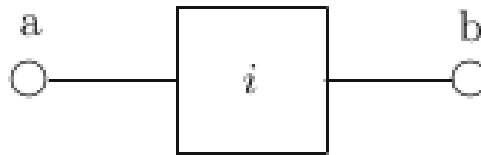


FIGURE 1.8 – Le composant i dans un diagramme (de blocs) de Fiabilité

- Un système non trivial peut avoir une structure composée.

1.11.1 Calcul de fiabilité via RBD de système composé

Système (structure) composé : dans un système avec n composants, pour le i^{eme} composant à l'instant t , on définit une variable aléatoire $X_i(t)$ par :

$$X_i(t) = x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{eme} \text{ composant fonctionne} \\ 0 & \text{si le } i^{eme} \text{ composant échoue} \end{cases}$$

Fonction de structure :

- Si les n composants sont représentés par le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors quelques uns des 2^n états correspondent à un système en fonctionnement et quelques autres à sa défaillance.

→ L'état du système est donc une fonction de x appelée **fonction de structure** définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si le système fonctionne} \\ 0 & \text{si le système est en panne} \end{cases}$$

Cas de système en série :

- Représentation d'un système **série** :

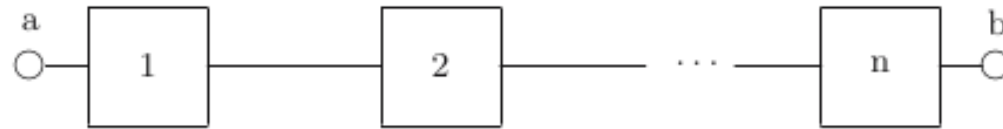


FIGURE 1.9 – Diagramme (de blocs) de Fiabilité en série

→ Un système série ne "fonctionne" que si tous ses composants fonctionnent.

Fonction de structure série (x_i représente la fiabilité R_i du composant i) :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = 1 \text{ pour TOUS les composants} \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \text{ pour n'importe quel composant} \end{cases}$$

$$= \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^n x_i$$

- **Cas de système en parallèle** (x_i représente la fiabilité R_i du composant i) :

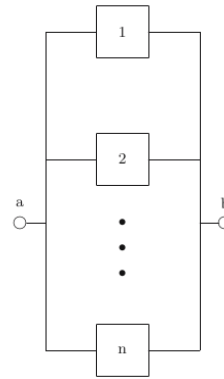


FIGURE 1.10 – Diagramme (de blocs) de Fiabilité en parallèle

→ Un système parallèle ne "fonctionne" que si au moins un de ses composants fonctionne.

Fonction de structure parallèle :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = 1 \text{ pour } n'importe \text{ composant} \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \text{ pour } TOUS \text{ les composants} \end{cases}$$

$$= \text{max}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

• **Cas de systèmes composés** (combinaisons des précédents)

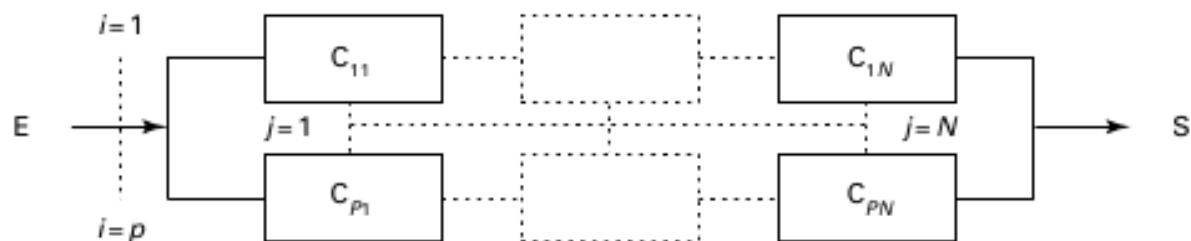


FIGURE 1.11 – Diagramme de blocs parallèle-série avec $\phi(x) = 1 - \prod_{i=1}^P \left(1 - \prod_{j=1}^N x_{ij} \right)$

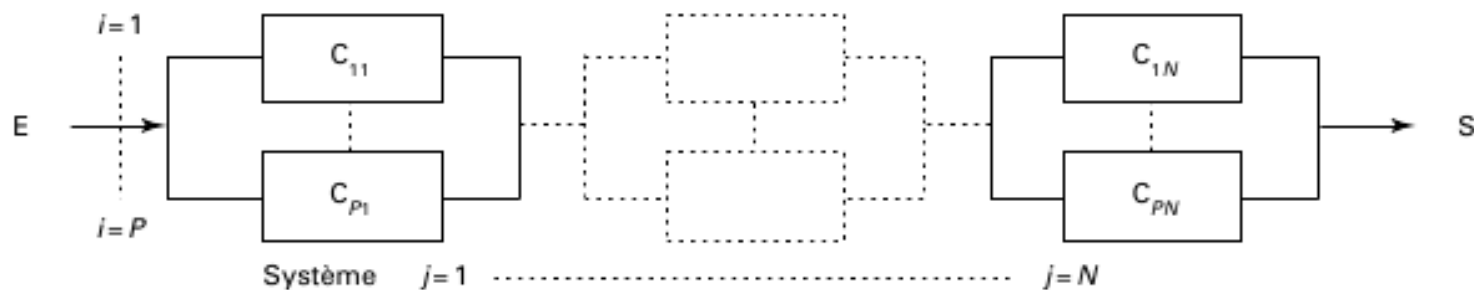


FIGURE 1.12 – Diagramme de blocs série-parallèle avec $\phi(x) = \prod_{j=1}^N \left(1 - \prod_{i=1}^P (1 - x_{ij}) \right)$

- Cas de système composé (k parmi N)

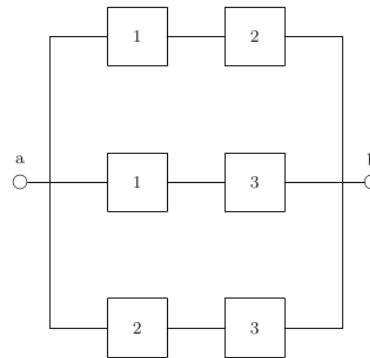


FIGURE 1.13 – Diagramme (de blocs) de Fiabilité d'un système 2-parmi-3 (notez les N°)

→ Un système k_parmi_n (k_of_n) fonctionne si k ou plus de ses composants fonctionnent :

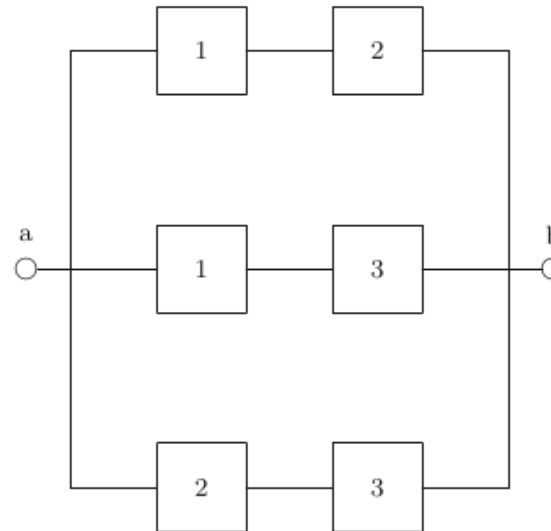
$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases}$$

$$= \sum_j \left(\prod_{i \in A_j} x_i \prod_{i \in A_j^c} (1 - x_i) \right)$$

Avec A_j n'importe quel sous ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec au moins k éléments ;

→ la somme est faite sur tous ces sous-ensembles. ../..

Exemple : dans le cas du système **2-parmi-3**



$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \sum_j \left(\prod_{i \in A_j} x_i \prod_{i \in A_j^c} (1 - x_i) \right) \\
 &= x_1 x_2 (1 - x_3) + x_1 x_3 (1 - x_2) + x_2 x_3 (1 - x_1) + x_1 x_2 x_3 \\
 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_2 x_3 \quad \leftarrow \text{la sortie}=1
 \end{aligned}$$

➔ Si par exemple x_2 est défaillant, alors on a $0 + 1 - 0 = 1$: le système fonctionne !

☞ Rappel : $\phi(x) \in [0, 1]$ d'où le terme $-2x_1 x_2 x_3$.

- Il existe également des systèmes composés à **vote P/N** :
 - N composants simples en parallèle dont la fiabilité élémentaire de chacun est x_i et
 - Un dispositif de **vote** basé sur P composants en fonctionnement.

L'expression de la fiabilité (fonction de structure) :

$$\phi(x) = \sum_{i=P}^N \binom{i}{n} x_i^i (1 - x_i)^{N-i}$$

Suite → Exemples

1.11.2 *Système cohérent*

- **Système Cohérent** : un système (structure) est cohérent si les conditions suivantes sont réunies :

1. $\phi(0, 0, \dots, 0) = 0$: si tout composant est en panne alors le système est en panne
2. $\phi(1, 1, \dots, 1) = 1$: si tout composant est en marche, alors le système fonctionne
3. $\phi(x)$ est non-décroissant pour chaque composant : si dans un système en fonctionnement, un composant défaillant est repéré, alors le système restera en fonctionnement.

→ Autrement dit : si $\phi(x)$ est la fonction de structure d'un système cohérent, alors

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(x) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

- Ce qui indique qu'en fonctionnement, un système fonctionne au moins aussi bien qu'un système dans lequel les mêmes n composants sont en **série** ;

et ne fonctionnera pas mieux qu'un système où les mêmes n composants sont en **parallèle**.

→ Voir annexes pour plus de détails.

1.12 Exemples Prédiction de Fiabilité de structure

Rappels : la prédiction de Fiabilité est basée sur la **fonction de structure** :

→ l'état d'un système est le produit des états de ses composants, en particulier, si :

$$x_i = \begin{cases} = 1 & \text{Si la composante } e_i \text{ est en bon état} \\ = 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

alors l'état (la fiabilité) du système est

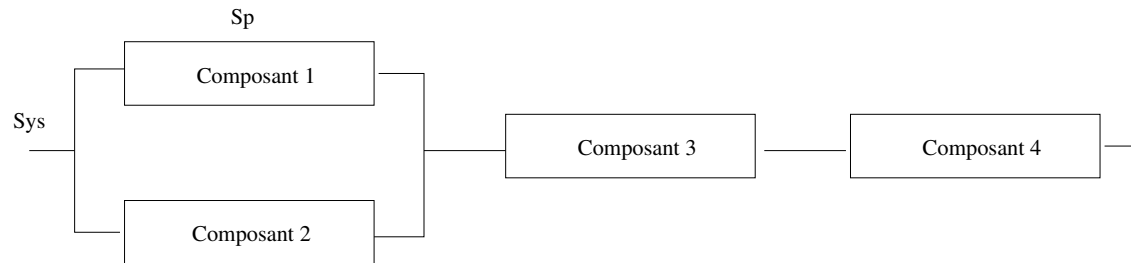
$$R_{ss} = \phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{pour une structure en série et}$$

$$R_{sp} = \phi(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \quad \text{pour une structure en parallèle}$$

- Le comportement du système est basé sur celui de ses composantes

→ En tirer les fonctions de Fiabilité

1.12.1 Exemple Fiabilité des architectures en Série / Parallèle



- Pour la partie parallèle Sp , on a $F_{Sp} = F_1 \times F_2 \rightarrow 1 - R_{Sp} = (1 - R_1) \times (1 - R_2)$

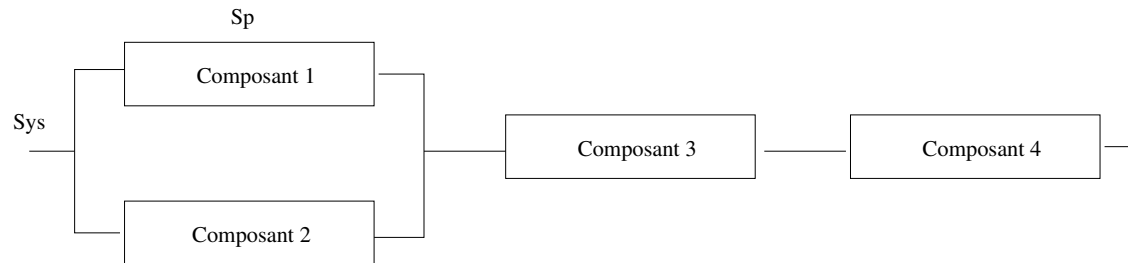
→ $R_{Sp} = 1 - [(1 - R_1) \times (1 - R_2)]$ Rappel : $F_{sys} = 1 - R_{sys}$.

- Pour un système en série, la fiabilité est le produit des composants.
- Pour **tout ce système en série** $Sys \equiv (Sp_3_4)$, on a :

$$R_{sys} = \left[1 - \prod_{i=1}^2 (1 - R_i) \right] \times R_3 \times R_4 = [1 - (1 - R_1) \times (1 - R_2)] \times R_3 \times R_4$$

- Par ex., pour un taux de défaillance constant et une fiabilité modélisée par une loi *exponentielle* :

$$R_{sys} = [1 - (1 - e^{-\lambda_1 t}) \times (1 - e^{-\lambda_2 t})] \times e^{-\lambda_3 t} \times e^{-\lambda_4 t}$$

Exemple : lien avec la redondance :

- Si la fiabilité de $R_1 = R_2 = 0.9$

alors $R_{Sp} = 1 - [(1 - R_1) \times (1 - R_2)] = 1 - (1 - 0.9)^2 = 1 - 0.01 = 0.99$

- La redondance (dans la branche parallèle) permet d'améliorer la fiabilité de R_{Sp}
- **Pas convaincu ?** mettre deux ampoules à la place d'une dans votre salle de bain!
 - ➔ plus de chance d'être éclairé!

- Dans les avions, les câblages / circuits sensibles sont redondants.
- La redondance améliore la fiabilité mais les contraintes de coût / volume / poids jouent contre !

Suite ➔ FT

Remarques :

- Si les λ_i sont des variables **aléatoires**, alors R_{sys} devient **aléatoire** (par composition des lois de probabilités).

- Lorsque λ_i est aléatoire, on peut utiliser la **Convolution** pour calculer la somme de 2 variables aléatoires (avec défaillance connue).

- **PARALLÈLE** : si $Z = A + B$, alors la densité de proba de Z sera

$$g_z(y) = g_{A+B}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(u) \times f_B(y - u) du$$

- **SÉRIE** : si $Z = A.B$, alors la densité de proba de Z sera $g_z(y) = g_{A.B}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(u) \times f_B\left(\frac{y}{u}\right) \times \frac{du}{|u|}$

→ Intégrales difficiles à calculer, sauf pour additionner des lois *Normales* (pour A et B) ou multiplier des lois *log-normales* .

→ Si les lois différentes, alors calculs complexes !

- Un outil (de simulation) : **MCL**.

1.12.2 Modes de défaillance et fiabilité

- Connaissant tous les instants de défaillance, on peut faire une estimation de la fiabilité :
 - du système ;
 - de chaque fonction ;
 - de chaque composant en fonction du temps système.
- Une fois les lois de fiabilité connues, il est possible d'estimer la fiabilité du système en considérant sa structure.
- Dans ce cas, le diagramme **série** correspond au cas le plus pessimiste du calcul de la **fiabilité**.

$$R_{syst}(t) = \prod_{i=1}^c \prod_{j=1}^{k_i} R_{ij}(t)$$

où c : le nombre des composants ;

k_i : le nombre des **modes de défaillance** pour le composant i .

1.12.3 Cas de Fiabilité d'une fonction

- La loi de **fiabilité pour une fonction** est donnée par la relation :

$$R_{func}(t) = \prod_{i=1}^c \prod_{j=1}^{k_i} R_{ij}(t)^{\Psi(i)}$$

où c : le nombre des composants ;

k_i : le nombre des **modes de défaillance** pour le composant i .

$$\Psi(i) = \begin{cases} = 1 & \text{Si la composante } i \text{ participe à la fonction} \\ = 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

→ Disposer des distributions de la loi de fiabilité permet les calculs.

1.13 Intro. à quelques outils d'analyse/synthèse de Fiabilité

- On peut (aussi) calculer la fiabilité par des techniques (quantitatives) non-Bayésiennes :

1. **Arbre de défaillance** (*Fault Tree (FT)*) : la plus utilisée parmi les non-Bayesiens

- **Ne prend pas** en compte la dépendance temporelle et fonctionnelle des composantes.
- Chaînes de Markov et FT dynamiques apportent une réponse à la dépendance temporelle.
 - Mais sont d'une combinatoire très grande pour les systèmes complexes.

2. **Diagramme de Blocs** (de fiabilité) ou RBD :

- adapté pour tester des configurations diverses (1 block par composant).

3. **Fuzzy Bayesiens**

4. **RdP / RN** (Réseaux de Petri / de Neurones)

5. Méthode des **moments** (math) : $\mu_k = E[(X - E[X])^k]$:

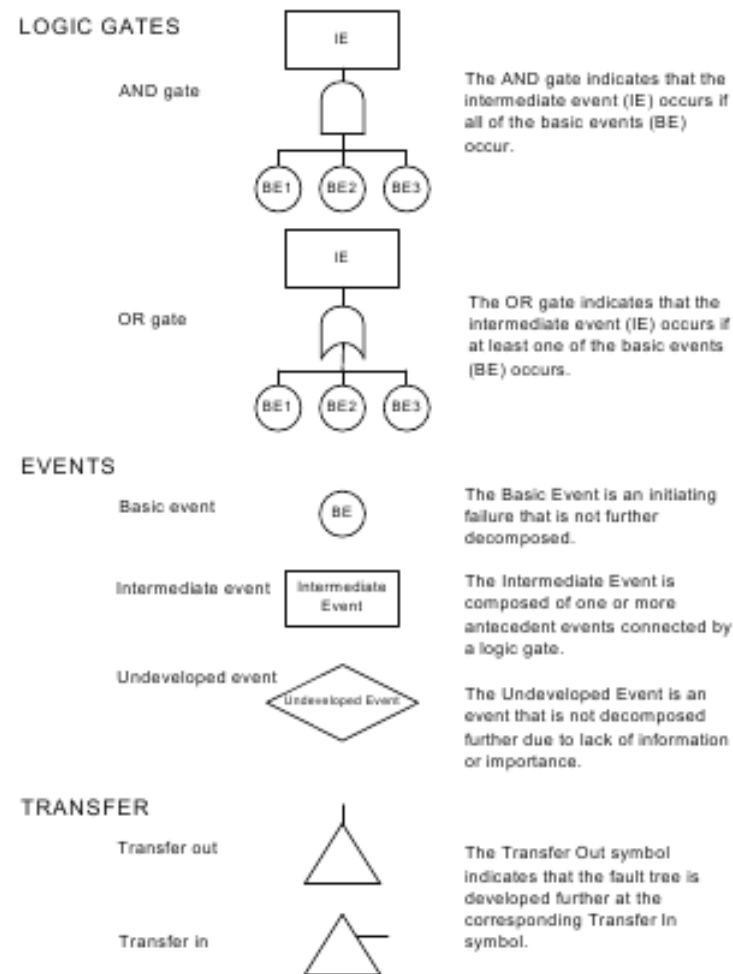
- bonne approximation des distributions.

6. etc...

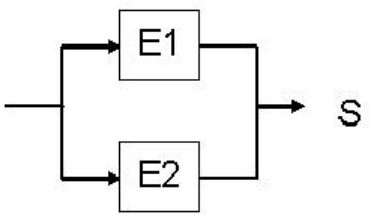
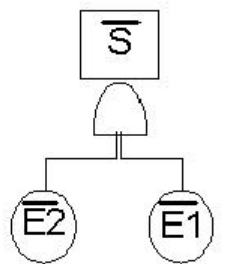
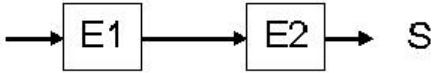
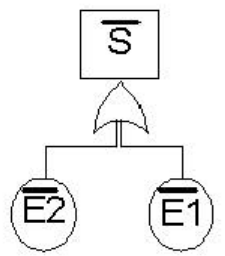
→ **Distributions**

1.13.1 Symbolique des arbres de défaillance (FT)

- Quelques symboles utilisés dans les **arbres de défaillance**.



1.13.2 Relations FT et RBD

Diagramme de fiabilité	Arbre de défaillances	Probabilité occurrence
		$P(\overline{S}) = P(\overline{E1} \cdot \overline{E2})$ $= P(\overline{E1}) P(\overline{E2})$ <p>si E1 et E2 ind</p>
		$P(\overline{S}) = 1 - P(S)$ $= 1 - P(E1 \cdot E2)$ $= 1 - P(E1) P(E2)$ <p>si E1 et E2 ind</p>

→ On remarque le principe de "fonctionnement" dans RBD et de "panne" dans FT.

- Une composition Série de RBD = OR de FT, composition Parallèle de RBD = AND de FT

1.13.3 Exemple-1 de FT

- Un arbre de défaillance (*Fault Tree*) pour la protection incendie avec 3 événements basiques, un intermédiaire et un événement principal.

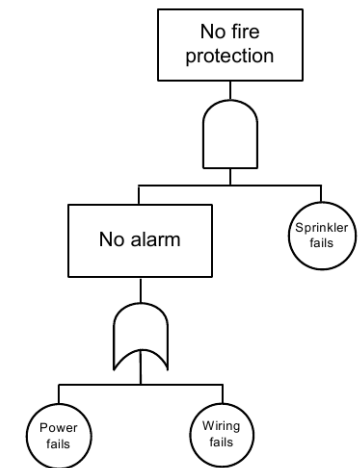
- Si la "douche" et (AND) l'alarme sont défaillantes, alors le système l'est aussi.
- Si problème d'électricité ou (OU) câblage alors alarme défaillante.
- Montage parallèle : Si la "douche" et (AND) l'alarme sont défaillantes, alors le système l'est aussi.
- Montage Série : Si problème d'électricité ou (OU) câblage alors alarme défaillante.

👉 FT vs RBDs : la convention AND/OR est inversée :

→ Dans un FT, la sortie (l'objectif) = la "panne" alors que dans RD, la sortie = le "fonctionnement".

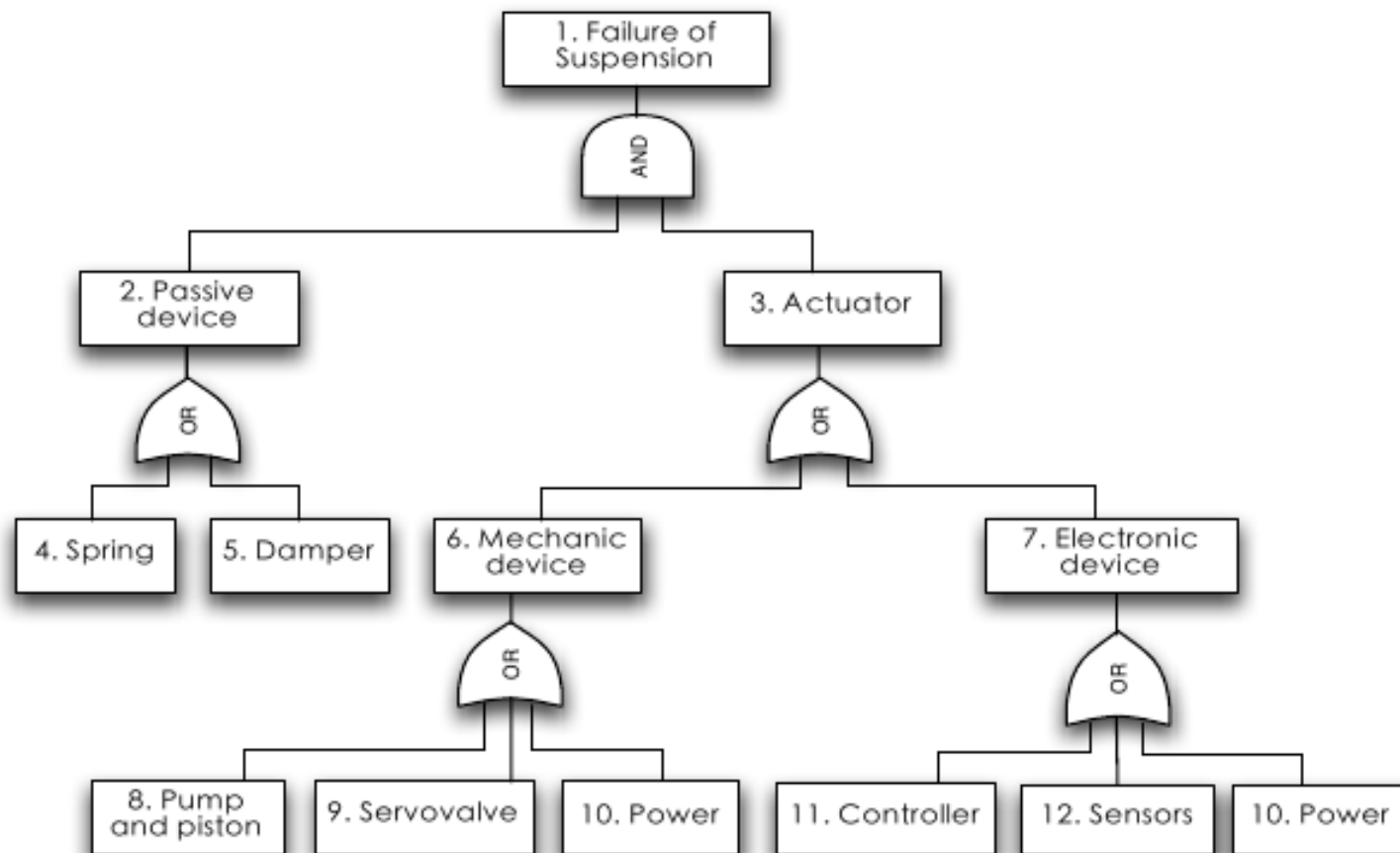
- Dans FT, tout noeud représente une panne : la racine est la Défaillance (F)
- Dans RBD, tout (donc la racine) est la Fiabilité (R)

- On peut passer du FT au BN.



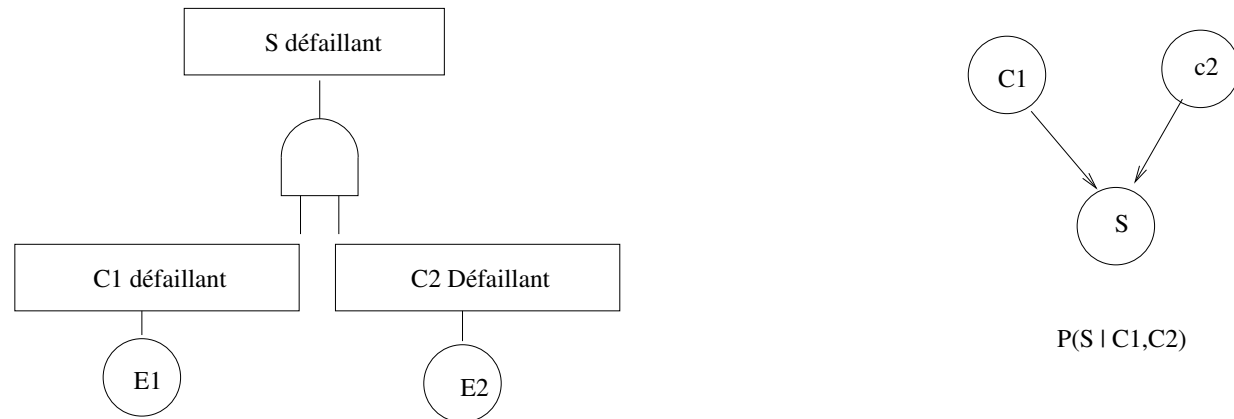
1.13.4 Exemple-2 de FT

- Arbre de défaillance d'un dispositif *suspension active* :

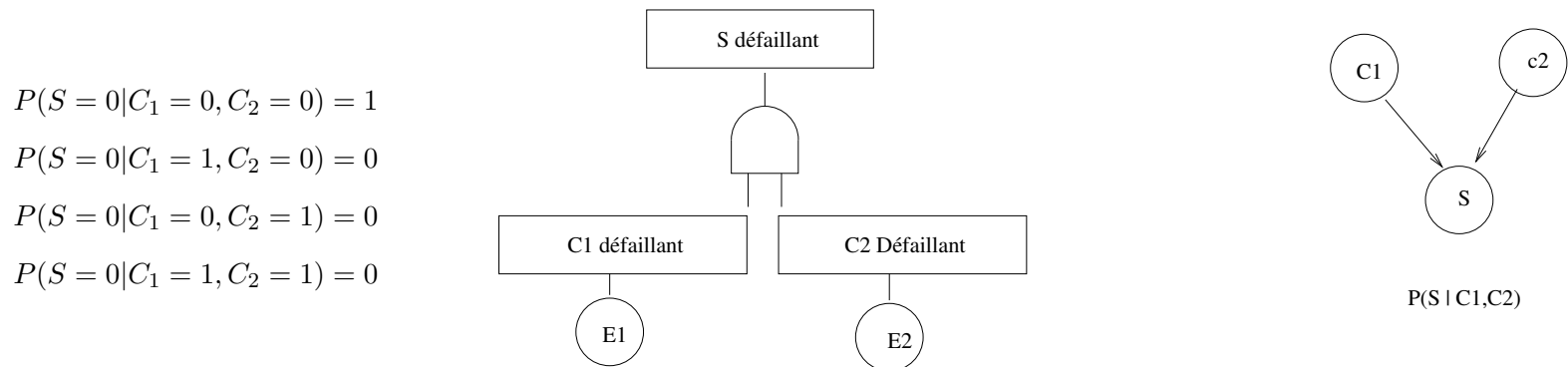


1.13.5 Passage FT vers BN

- Par exemple, pour un système parallèle (AND) et son équivalent BN ($P(S|C_1, C_2)$).



- Dans le cas de ce BN, on aura (S défaillant si C1 et C2 tous les deux défaillants) :



👉 N.B. : une porte OR donnera le même BN (cf. ci-dessus) mais l'expression des probabilités

devient $P(S|C_1) + P(S|C_2)$.

- Pour une seule observation, on obtient une table de la forme (valeurs binaires) :

	C1	Panne	Panne	Marche	Marche
	C2	Panne	Marche	Panne	Marche
S	Panne	1	1	1	0
S	Marche	0	0	0	1

Passage à la CPT (Conditional Probability Table) :

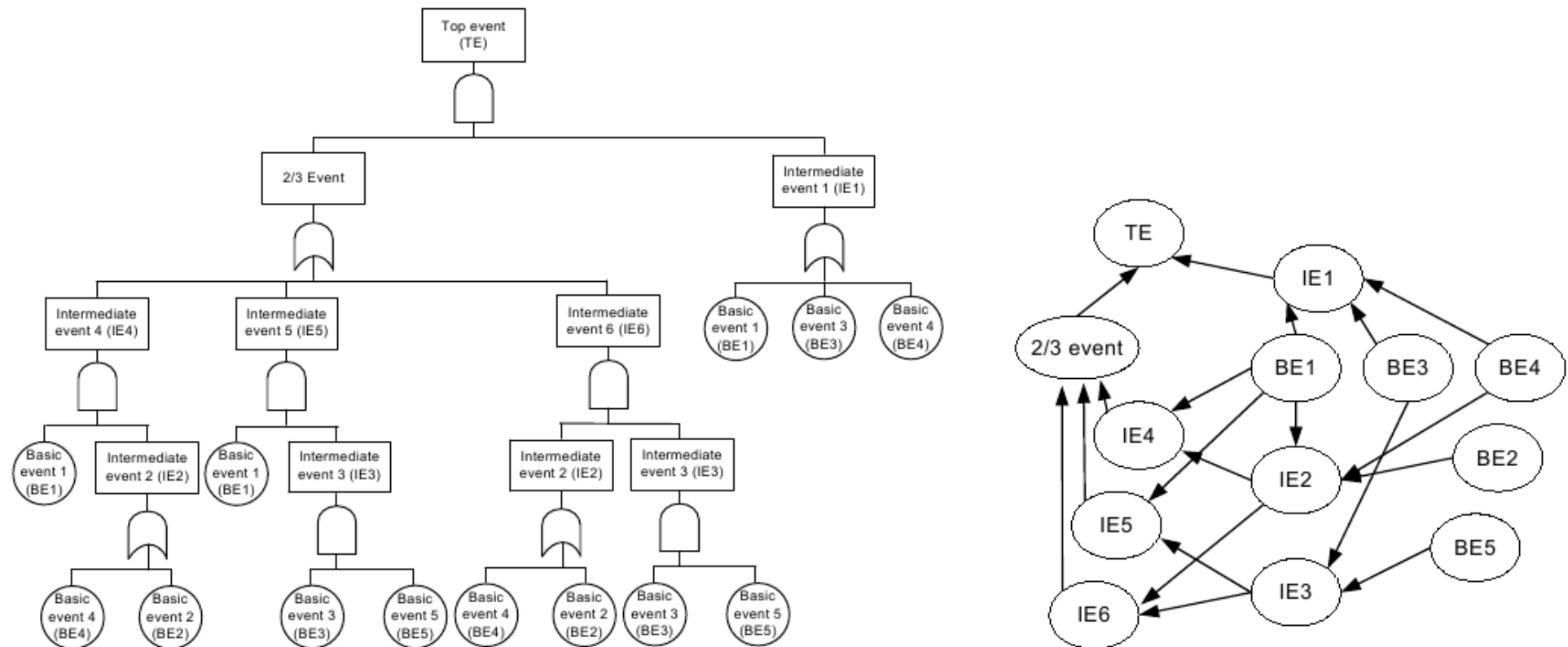
Après de multiples observations, on pourrait calculer des CTP suivantes :

→ Par exemple, on aura observé que quand C1 est défaillant, le fonctionnement de C2 laisse au système S une probabilité de 0.2 de continuer à fonctionner.

	C1	Panne	Panne
	C2	Marche	Panne
S	Marche	0.2	1
S	Panne	0.8	0

- Vers les calculs de croyances ...

Un exemple plus complexe d'arbre de défaillance et son BN :



- Pour comprendre le rôle de AND et OR dans FT (inverse dans RBD) :

→ Rappel : dans FT, la sortie (l'objectif) est la "panne" alors que dans RBD, la sortie est le "fonctionnement".

1.13.6 Complément : Minimal-Path et Cut-Sets

- En plus du diagramme de fiabilité et la fonction de structure, on utilise deux autres notions : **chemin minimal** (*minimal path*) et **ensemble de coupure** (*cut sets*) pour représenter la structure d'un système (pour une analyse de Fiabilité).

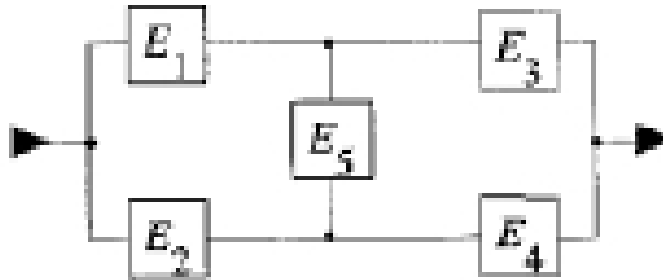
- **chemin minimal** d'un système : tout (vecteur) x pour lequel $\phi(x) = 1$;

- **ensemble de coupure** d'une structure : tout x pour lequel $\phi(x) = 0$.

→ L'ensemble des indices correspondant aux composants en fonctionnement (resp. défaillant) d'un *chemin minimal* (resp. *ensemble de coupure*) est appelé l'**ensemble du chemin** ou *path-set* (resp **ensemble de coupure** ou *cut-set*).

- Par extension : *minimal path-set* et *minimal cut-set*.

Exemple : ici les $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 5, 4\}$, $\{2, 5, 3\}$ sont des minimal-path-sets.



- **minimal-path-set et RBD :**

un ensemble E de composants est un *minimal path-set* si le système fonctionne ($x_i = 1$ quand tous les composants $x_i \in E$ et $x_j = 0$ pour tout $x_j \notin E$), mais que cette règle ne s'applique pas à tout sous-ensemble de E .

- **cut-set minimal et FT :**

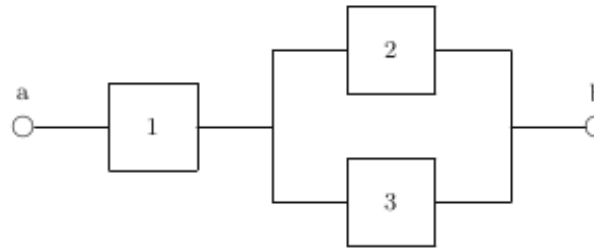
ensemble tel que si TOUS les composants sont en panne, alors le système est en panne.

→ On refait FT en plaçant un OR sur les cut-set minima.

- Exemple : ../..

Exemple (et lien avec fonction de structure)

Soit le diagramme (RBD)



Les *ensembles de chemins minima* sont $a_1 = \{1, 2\}$, $a_2 = \{1, 3\}$.

→ En utilisant l'équation de fiabilité de structure (pour *ensembles de chemins minima*), on a :

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= 1 - \prod_{j=1}^2 (1 - \prod_{i \in a_j} x_i) \\
 &= 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) \\
 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3
 \end{aligned}$$

→ Voir en Annexes pour plus de détails.

1.14 Quelques distributions courantes

Pourquoi une distribution ? :

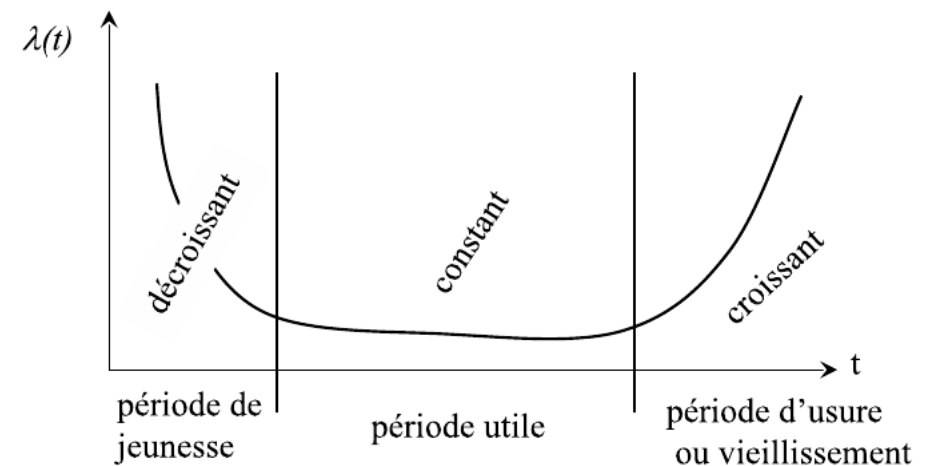
Rappel : on dispose de données de survie et l'on souhaite y ajuster un modèle paramétrique

→ La question du choix d'une distribution se pose.

- A partir de la fonction de **densité de défaillance** ($f(t)$), on obtient la fonction de **répartition** ($F(t)$), la fonction de **Fiabilité** ($R(t)$) et le **taux de défaillance** (λ_t).

→ Exemple : Courbe en *baignoire*

- Il existe de multiples lois de fiabilité
 - Chacune représente une famille (cf. shape)
 - On cite les plus utiles.



1.14.1 Complément (historique) : Loi de Gompertz

- Une des premières lois, portée sur les populations humaines (elle a plus d'un siècle d'âge!).
 - Utilisée en Fiabilité (électroniques, corrosion, etc) et pour d'autres populations statistiques.
 - Gompertz faisait l'hypothèse que la **mort** peut être provoquée par 2 causes distinctes :
 - *Un hasard* : accident subi avec une intensité indépendante du temps
 - *Affaiblissement* (usure) dans le temps.
- Elle correspond alors à une *force de mortalité* φ (= la fonction du hasard h)
- = une quantité qui s'accroît dans le temps d'une quantité $d\varphi$ proportionnelle à φ .

- Ce modèle établit un taux de défaillance qui se compose de termes indépendants de l'âge (négligeable et abandonné ici) et des termes dépendants de l'âge (= fonction de Gompertz).

→ Le taux de défaillance (λ en fiabilité) :

$$\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = q = \text{Cste} \quad x = \text{l'âge}$$

→ d'où *la force de mortalité (exponentielle)*

$$\varphi = a \cdot e^{q \cdot x}$$

- On exprime ensuite cette loi sous sa forme la plus courante par

$$\mathcal{L}_x = k \cdot g^{c^x} : \quad \text{nombre de survivants d'âge } x \text{ à un instant donné}$$

Où x = l'âge, k = nbr d'individus à l'origine

g et c caractérisent la loi de survie.

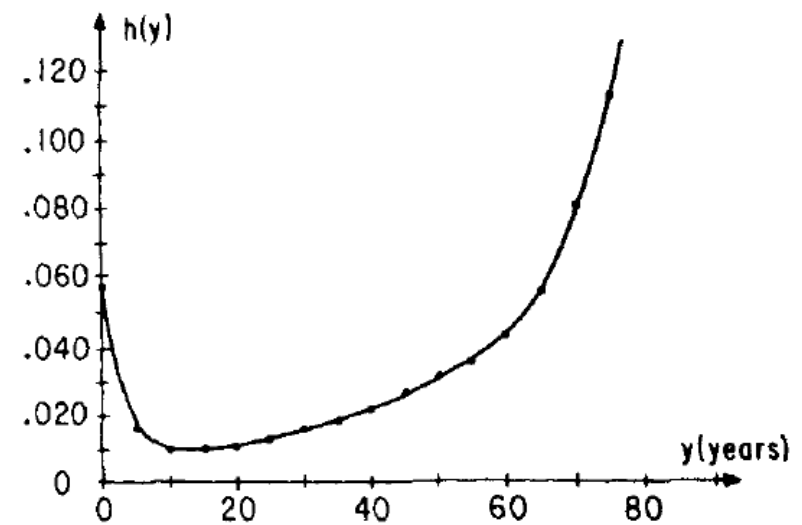
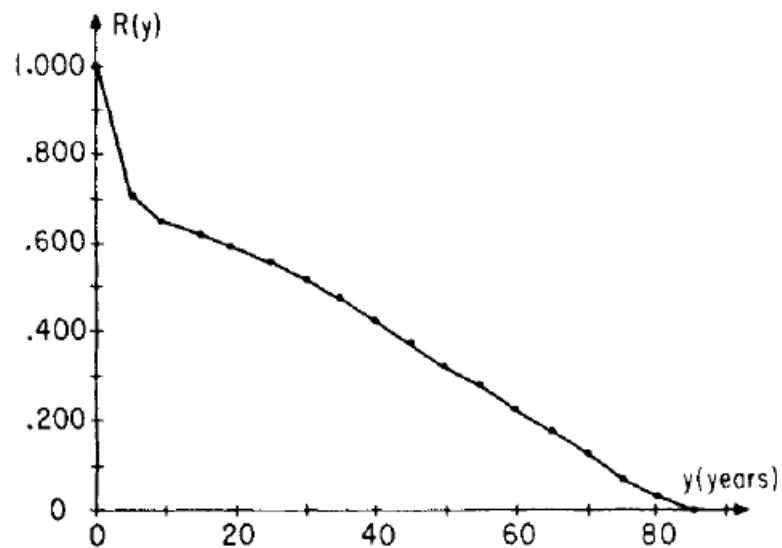
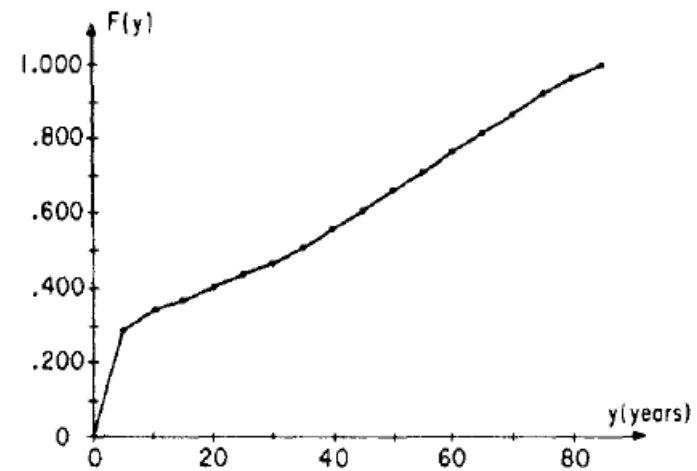
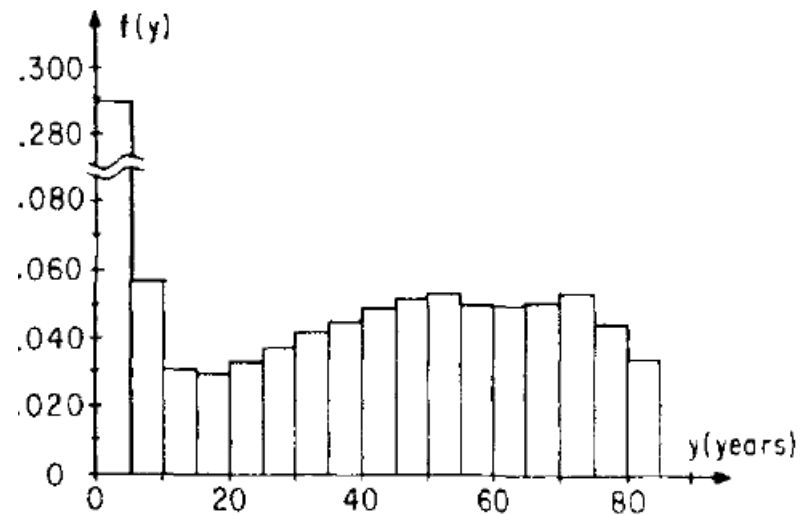
Exemple :

- Dans le tableau suivant, la colonne y représente des tranches d'âge, $f(y)$ est la probabilité de défaillance de cette tranche. Pour les autres colonnes, voir la suite.

<u>y</u>	<u>f(y)</u>	<u>F(y)</u>	<u>R(y)</u>	<u>h(y)</u>
0	-	0	1.000	
0-5	.290	.290	.710	.058
5-10	.057	.347	.653	.016
10-15	.031	.378	.622	.010
15-20	.030	.408	.592	.010
20-25	.032	.440	.560	.011
25-30	.037	.477	.523	.013
30-35	.042	.519	.481	.016
35-40	.045	.564	.436	.019
40-45	.049	.613	.387	.022
45-50	.052	.665	.335	.027
50-55	.053	.718	.282	.032
55-60	.050	.768	.232	.035
60-65	.050	.818	.182	.043
65-70	.051	.869	.131	.056
70-75	.053	.922	.078	.081
75-80	.044	.966	.034	.113
80-85	.034	1.000	0	.200

FIGURE 1.14 – Table des données de mortalité humaines de **Halley-1693** (tous les 5 ans)

- L'histogramme et la $f(t)$, CDF $F(t)$, $R(t)$ et $h(t)$ de la table ci-dessus.



1.14.2 Loi Normale (ou Laplace-Gauss)

- Représente bien la **fin de vie** des dispositifs subissant un phénomène de **vieillessement**.
- Loi continue et symétrique $N(\mu, \sigma^2)$
- On a :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2} \qquad F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) \cdot d(t)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt = \mu \qquad Var(t) = E[(t - \mu)^2] = E[t^2] - E^2[t] = \sigma^2$$

Remarque : si t suit une loi Normale $N(\mu, \sigma)$, $u = \frac{t - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale *centrée réduite* dont la fonction de répartition ϕ est donnée par : $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

1.14.3 Loi Log-Normale ou Galton ou Gibrat

- Représente bien la **mortalité** ou la durée de réparation des matériels.

ainsi que les phénomènes de **fatigue et d'usure** en mécanique

- S'applique bien lorsque les observations (de volume important) faites sont les conséquences d'un effet **multiplicatif de différentes causes indépendantes et aléatoires**.

$$f(t) = \frac{1}{t \cdot \sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

$$E(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)}$$

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)^2}}{t \int_0^{\infty} \sigma \sqrt{2 \pi} f(t) d(t)}$$

$$Var(t) = \int_0^{+\infty} [t \cdot E(T)]^2 \cdot f(t) \cdot dt = e^{(2\mu + \sigma^2)} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

A propos de la loi Log-Normale

Une variable aléatoire continue et positive t est distribuée selon une loi **lognormale**

Si son logarithme est distribué suivant une loi **normale**.

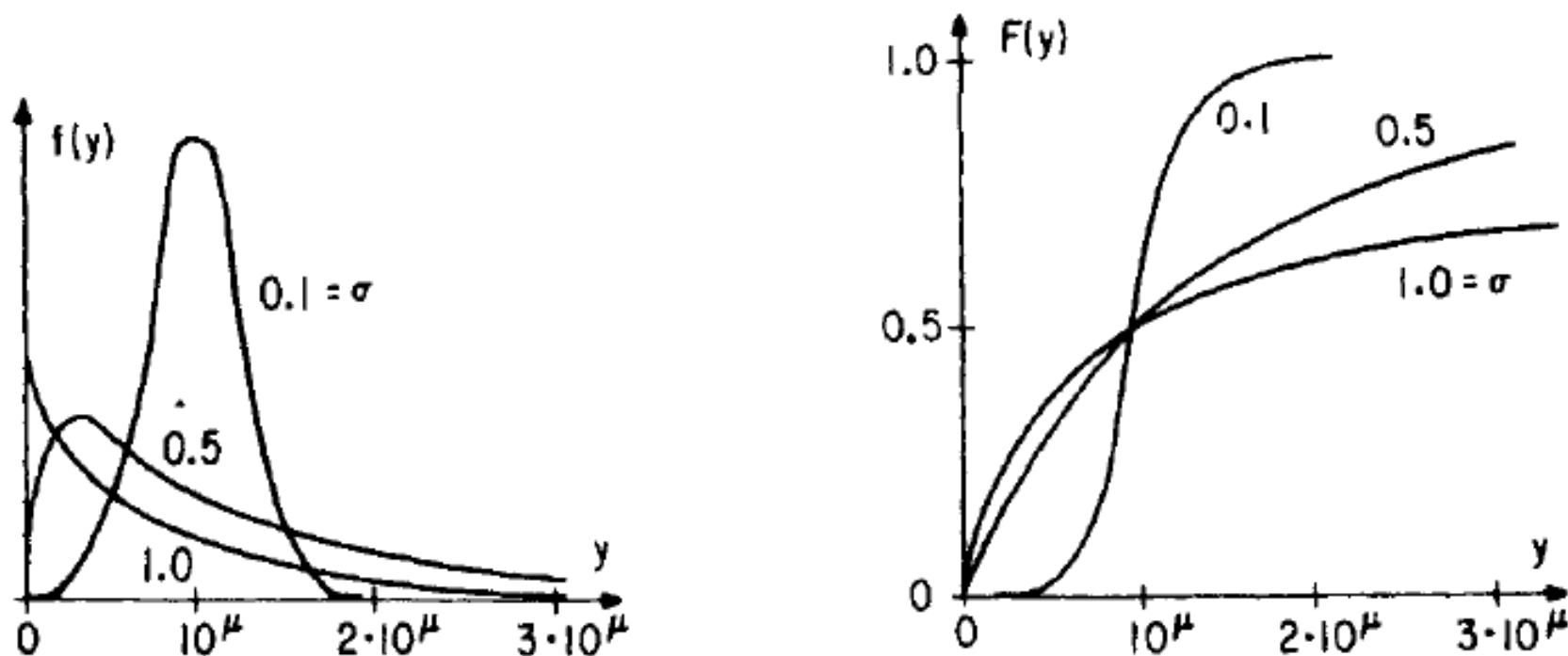


FIGURE 1.15 – $f(t)$ et $F(t)$ de la loi log-Normale.

Remarques sur la loi Log-Normale

- Elle permet d'exprimer les *effets proportionnels en Fiabilité* :

Si le taux de croissance d'une variable X (à chaque pas du processus) est aléatoirement proportionnel à sa valeur (donc $X_i = \alpha_i X_{i-1}$, α_i aléatoires iid.)

Alors la valeur de X à l'étape n est approximativement distribuée selon la loi **log-normale**.

En rapport avec le théorème *Central limite* :

- Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires iid,

Alors, la distribution de $\rho_n = \prod_{i=1}^n X_i$ tend vers une distribution log-normale d'espérance $n \mathbb{E}(\ln(X_i))$ et de variance $n \mathbb{V}ar(\ln(X_i))$, si $n \rightarrow \infty$

- Ces conditions arrivent souvent dans le cas de la **fatigue**/usure.

→ D'où l'intérêt de cette loi.

1.14.4 Loi Gamma

- Représente la loi d'occurrence de β évènements dans un processus *Poissonnien*.
- Souvent utilisée pour **modéliser le temps de défaillance**
 - ☞ Si t_i est le temps entre les défaillances successives d'un système, et t_i suit une distribution exponentielle, le temps cumulé d'apparition des défaillances suit une loi Gamma (conjugaison *Exponentielle* (le PDF) \Leftrightarrow *Gamma* (le CDF)).
- Sera utilisée comme une distribution a priori dans l'approche Bayesienne
- Représente aussi le **comportement réel** d'un matériel depuis sa mise en service jusqu'à son rebut → **représente les 3 phases de vie** (voir Weibull).
- ☞ N.B. : voir application soupape pour une méthode de calcul des paramètres.

- Les 3 paramètres habituels de cette loi (α, β, η) sont souvent restreints à 2 en posant $\eta = 1/\alpha$:

α : la "forme" (shape), β : le paramètre échelle. → donnent de la souplesse à la loi

→ Ces paramètres donnent les diverses situations : *décroissante, constante et croissante*.

$$f(t) = \frac{1}{\alpha^\beta \cdot \Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} \cdot e^{-t} dt = (\beta - 1)! \quad \text{si } \beta \text{ entier}$$

NB. : pour $\alpha = 2$, $\beta = v/2$, v entier = degrés de liberté, Gamma devient χ^2

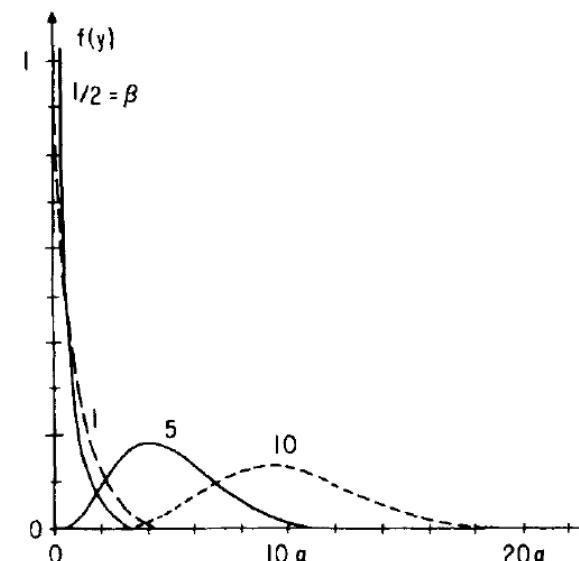
NB. : Pour $v = 2$ (donc $\beta = 1$), Gamma est une distribution **Exponentielle** avec $\mu = 2$

$$\bullet \lambda(t) = \frac{1}{\alpha^\beta \cdot \int_t^\infty \Gamma(\beta) \cdot f(u) \cdot du}$$

$$\bullet E(T) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\bullet Var(T) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- Pour $\beta = 1$, la loi Gamma devient **Exponentielle**



1.14.5 Loi Exponentielle

- Très **fréquemment** utilisée en Fiabilité (mécanique, électronique, Logicielle).
- Très utile pendant la période de **vie utile** où le taux de défaillance instantané λ est constante et les défaillances sont aléatoires (associé à un processus *Poissonnien*).
- Très utilisée en électronique (λ constante), permet de décrire le temps écoulé jusqu'à une défaillance (MTTF), ou l'intervalle de temps entre deux défaillances (MTBF).
- Également utilisée dans le cas de défaillance brutale
- Et pour des systèmes complexes composés avec des lois de fiabilité élémentaires différentes.

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \lambda(t) = \lambda \quad R(t) = e^{-\lambda \cdot t} \quad E(T) = \textcolor{red}{MTBF} = \frac{1}{\lambda} \quad Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Remarque : la loi exponentielle représente un cas particulier (conjugué) de Gamma.

1.14.6 Loi Beta

- Loi à 2 paramètres, très utile dans l'évaluation de la durée des **essais de fiabilité**

→ Représente la proba pour qu'un matériel survive au moins jusqu'à un temps t , lorsque **plusieurs** matériels sont testés simultanément (similaires mais indep.).

• Très utilisée en statistique **Bayésienne** comme distribution *a priori* pour la proba d'un évènement suivant une distribution **Binomiale** (ainsi qu'en contrôle de qualité). Cf. les exemples.

$$f(t) = \frac{1}{\beta(n, p)} \cdot t^{n-1} \cdot (1-t)^{p-1} = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)} \cdot t^{x-1} (1-t)^{y-1}$$

→ n et p sont les paramètres de forme (shape).

- Avec la fonction

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} \cdot dt = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Rappel : $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt = (\alpha - 1)! \quad \text{pour } \alpha \text{ entier.}$

→ la fonction $\Gamma(c) = (c - 1)!$

Pour la loi Beta :

$$E(t) = \frac{n}{n + p}$$
$$Var(t) = \frac{n \cdot p}{(n + p + 1)(n + p)^2}$$

- Voir exemple d'introduction ("générateurs d'urgence") en séance 1.

Nota Bene général : chaque loi représente une famille de distributions

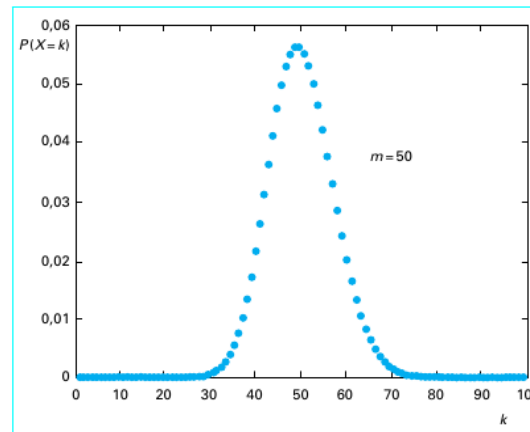
→ les paramètres de forme (shape) permettent de créer des situations différentes pour une loi.

1.14.7 Loi Poisson

- Le **temps** de défaillances matériels qui suivent une **loi exponentielle** est directement associé à un processus **Poissonnien** (*défaillances aléatoires, à taux constant*) : $P(X = k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$

→ $m =$ la moyenne.

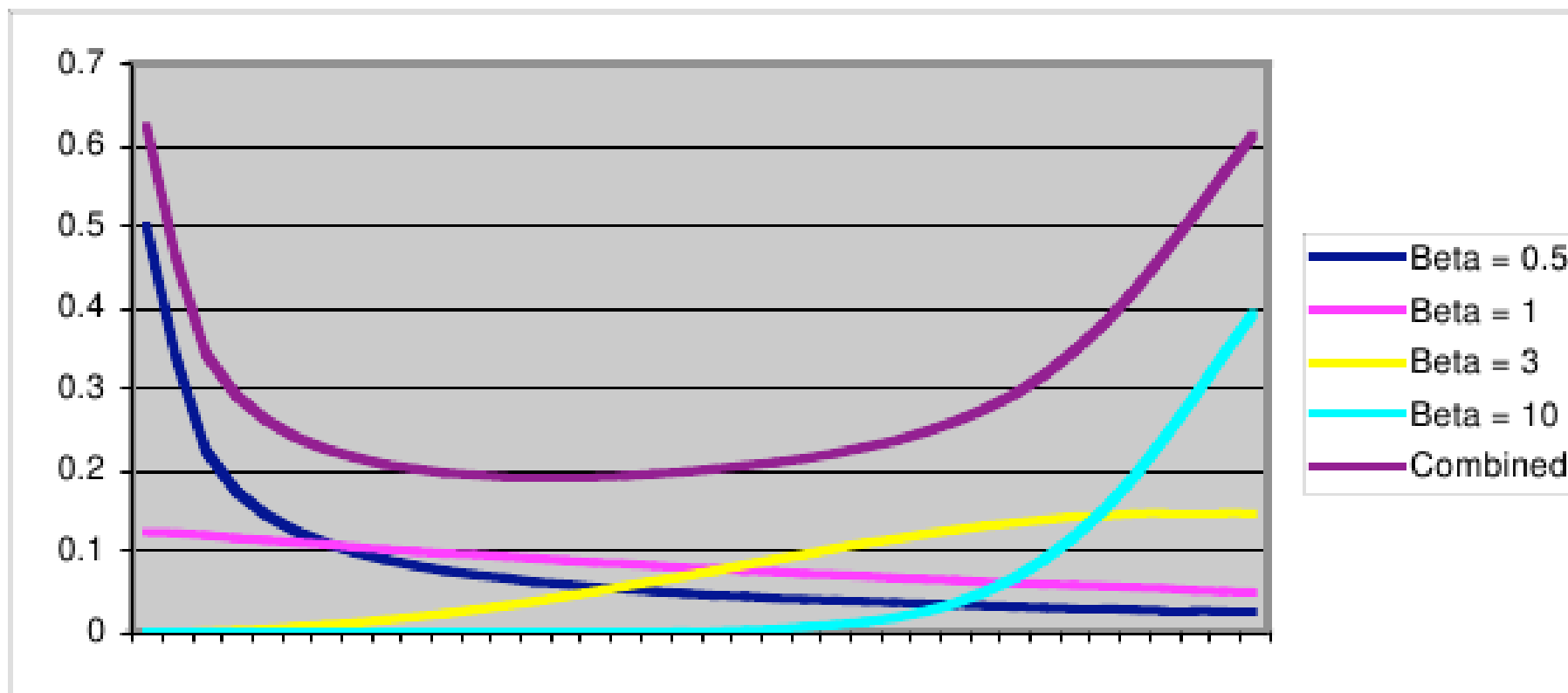
- Exemple : densité de probabilité pour la loi de Poisson avec $m=50$:



- Sachant la loi binomiale $P(X = i) = \binom{i}{n} p^i (1 - p)^{n-i}$, la loi de *Poisson* est la limite d'une loi *binomiale* de paramètre $\mathbf{m} = \mathbf{np}$ quand $n \rightarrow \infty$. Ici, variables aléatoires discrètes.

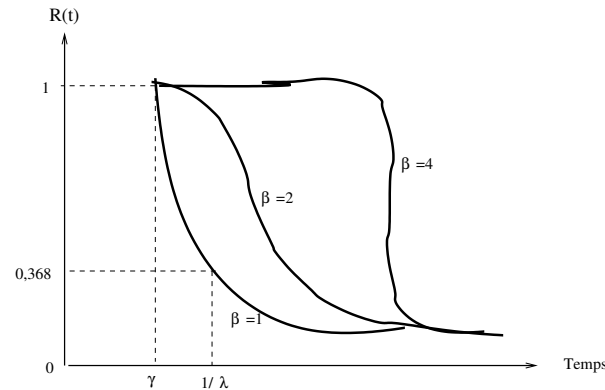
1.14.8 Loi Weibull

- Distribution générale et puissante qui permet de décrire le temps d'échec.



On note que si toutes les courbes sont **combinées**, le résultat est proche d'une courbe **Baignoire** (Bath Hub)

• Les paramètres γ, β, η :



γ en unité de temps est la position (ou localisation) : le décalage entre le début de l'observation (de panne) et du processus = le plus petit temps de défaillance possible (souvent = 0).

η est le paramètre d'échelle de temps (pour MTBF). Si $t - \gamma = \eta$ alors $F(t) = 63\%$.

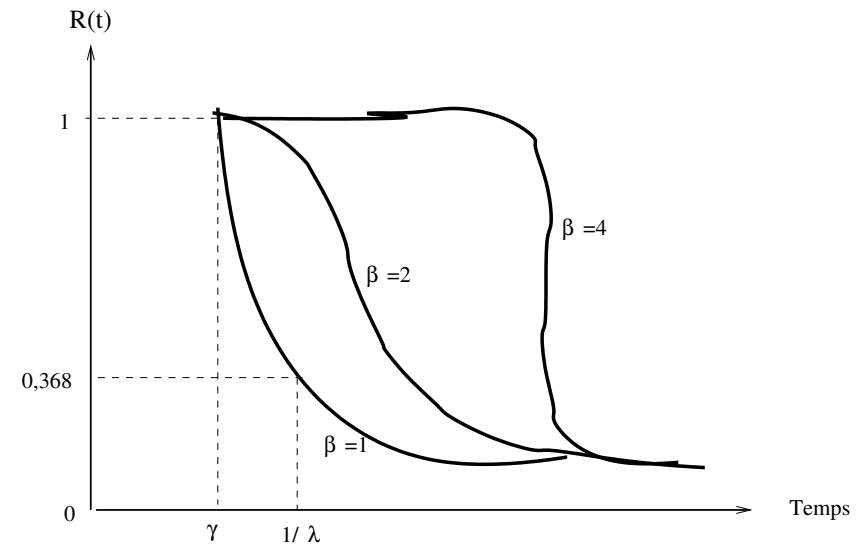
β est le paramètre sans unité de la "**forme**" (shape). C'est le plus important car il joue sur la variation du taux de défaillance et permet ainsi la modélisation des 3 phases :

- $\beta < 1$: période de jeunesse. La fiabilité décroît très rapidement puis lentement.
- $\beta = 1$: période de maturité (→ loi exponentielle)
- $\beta > 1$: période de vieillesse ou d'usure.

→ La chute de la fiabilité est d'abord lente puis monte fort après un certain moment.

Remarque : si $\beta = 1$ et $\gamma = 0$, on a une loi exponentielle.

- Le paramètre de forme β permet également de donner des indications sur le type de défaillance.
 - $\beta \in [1.5, 2.5]$ souligne un phénomène de fatigue.
 - $\beta \in [2, 3]$ souligne plutôt l'usure (+fatigue),
 - $\beta \in [3, 4]$ souligne la corrosion et l'usure.



- **Dans un calcul Bayésien**, les données ReX permettent d'obtenir un taux de défaillance moyenne

λ_{moy} (λ_{moy} = l'inverse de $\mathbb{E}(t)$ = l'inverse de MTBF) d'où on peut **(ré)-estimer la valeur de η** :

$$\lambda_{moy} = \frac{1}{\eta \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})} \Rightarrow \eta = \frac{1}{\lambda_{moy} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}$$

👉 L'a priori β (expertise) + le modèle de fonctionnement (voir plus loin : continue /à la sollicitation) + Rex (ajustant η) sont les ingrédients de **l'estimation Bayésienne de Weibull**.

- Loi très souple, représentative d'une très grande variété de phénomènes aléatoires.
 - Souvent utilisée en fiabilité mécanique pour sa capacité à prendre en compte le **vieillessement**
- Rappels : γ : décalage initial, $\gamma = 0$: début au temps t_0 .

β : souligne la forme (shape : jeunesse, maturité, vieillesse);

η : échelle du temps (eg. 1000h)

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta} \quad \lambda = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^\beta} \quad R(t) = e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta}$$

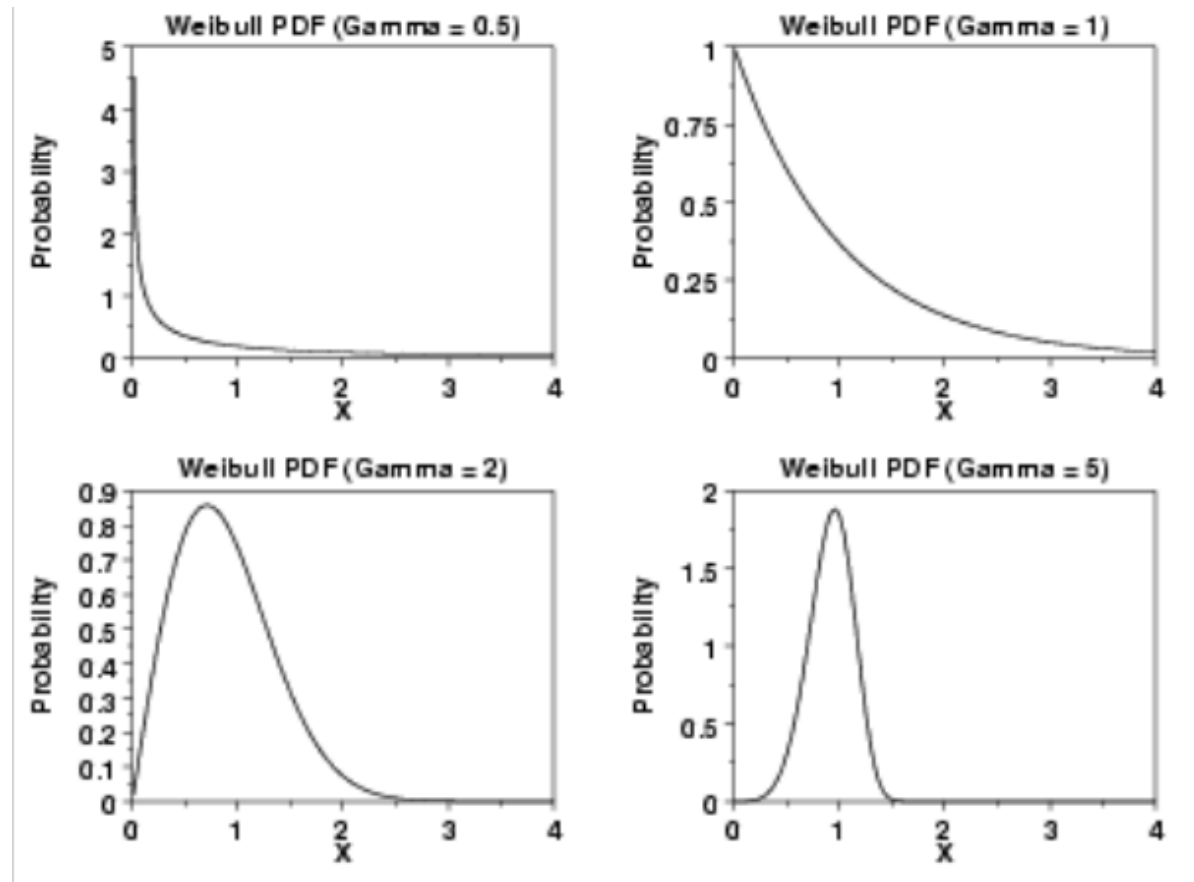
$$MTTF = E(T) = \gamma + \eta \cdot \Gamma(1 + 1/\beta)$$

$$Var(T) = \eta^2 \cdot [\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)]$$

Remarque générale sur les lois : t n'est pas toujours le temps, peut être une distance en Km. ou cycle ou période.

Différentes formes de Weibull selon les paramètres :

☞ Dans ces figures, le paramètre "Gamma" est le paramètre β de la loi Weibull.



→ Voir un exemple en Annexes.

1.14.9 Complément : Autres lois : Birnbaum-Saunders

- **Birnbaum-Saunders** ou la **loi de la fatigue** :

→ bien adaptée à un mode de **défaillance** (cf. fissure) dû au phénomène de **fatigue**.

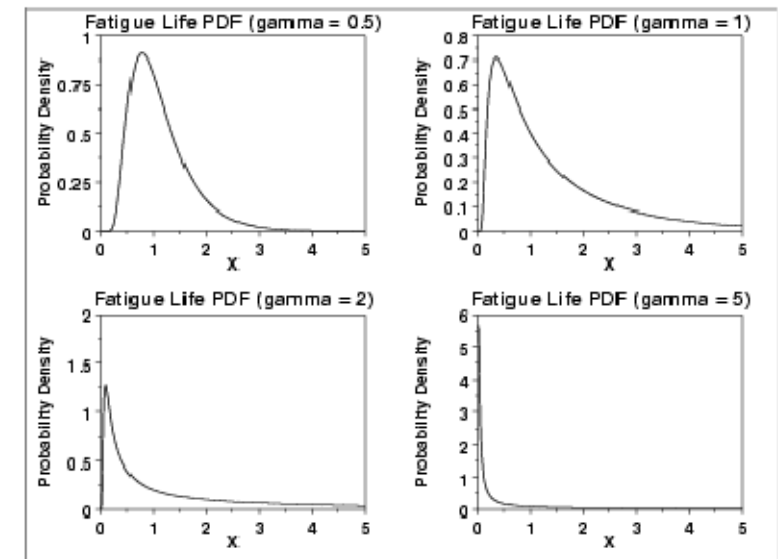
→ Cela la rend spécifique et réduit son champs d'action.

- Existent sous différentes formulations.

- La **forme standard** de la loi Birnbaum-Saunders :

$$f(t) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1/x}}{2\gamma x} \phi \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{1/x}}{\gamma} \right) \quad x > 0, \gamma > 0$$

γ : shape, ϕ = PDF de la loi Normale



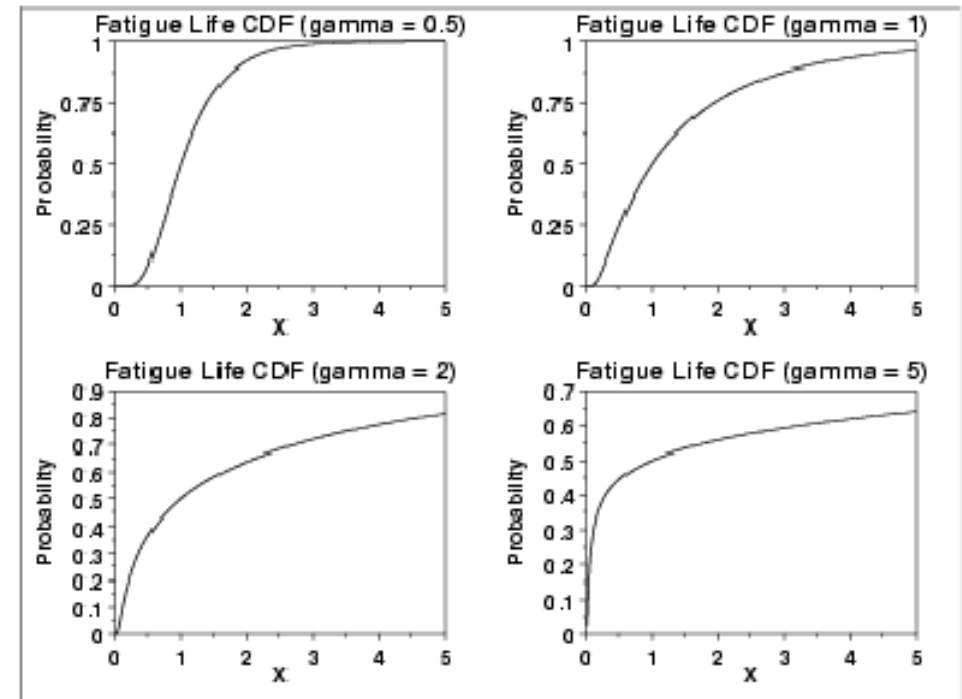
PDF de la loi Birnbaum-Saunders avec différentes valeurs de γ

- La CDF de la loi Birnbaum-Saunders :

$$F(x) = \Phi \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{1/x}}{\gamma} \right) \quad x > 0, \gamma > 0$$

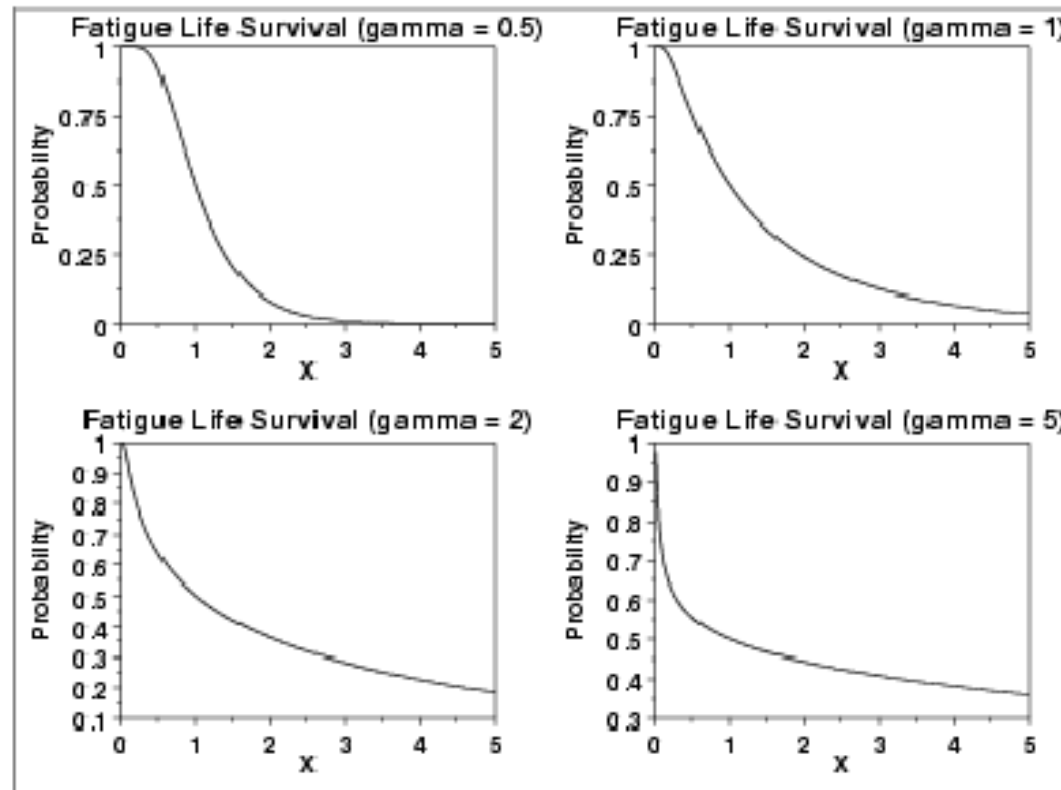
Φ = CDF de la loi Normale

γ : shape



CDF de la loi Birnbaum-Saunders avec différentes valeurs de γ

- La loi de survie ($R(t)$) pour différentes valeur de γ :



1.14.10 Autres lois : Uniforme

- La loi **uniforme** : souvent utilisée en fiabilité pour les essais Bayesiens en l'absence connaissances pour construire l'information *a priori* (voir la suite).
- Cette loi peut prendre toute valeur dans un intervalle (a, b) avec une densité de probabilité constante.

→ la fonction de répartition : $F(t) = \frac{t - a}{b - a}$

→ la densité de probabilité : $f(t) = \frac{1}{b - a}$

→ $\mu = \frac{a + b}{2}$ et $Var = \frac{(b - a)^2}{12}$

- Autres lois existent pour des cas particuliers...

1.14.11 Bilan : Choix d'une distribution*

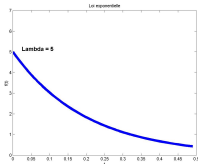
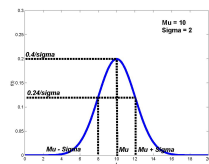
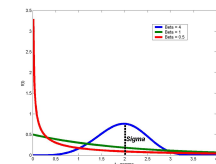
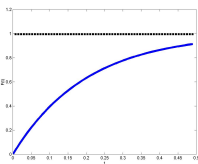
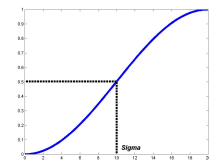
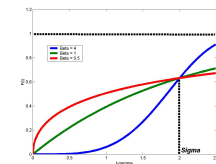
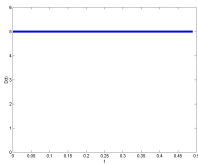
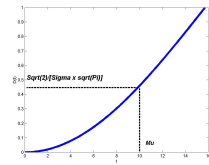
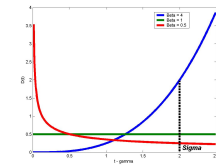
Rappel : Pour exploiter les données REX, la question du choix d'une distribution se pose.

Bilan des distributions :

- **Exponentielle** : Bien adaptée pendant la période de **vie utile** où le taux de défaillance instantané λ est constante (comme en électronique) et les défaillances sont aléatoires (Poissonien).
 - ➔ Adaptée également dans le cas de **défaillance brutale**, ou pour des systèmes complexes composés avec des lois de fiabilité élémentaires différentes.
- **Gamma** : adaptée à un taux de défaillance monotone mais sa fonction de répartition ne s'obtient pas analytiquement.
 - Permet de modéliser toutes les phases, comme Weibull.
 - Elle est **conjugué** (pour l'approche Bayésienne) à une loi exponentiel : facilite grandement les calculs (inférence, itérations, intégrales, ..., comme *Beta* avec *Binomiale*).

- **Weibull** : souvent bien adaptée mais complexe (donc pas la plus utilisée).
 - Elle a l'avantage de décrire alternativement les **3 phases**, à l'aide de β .
 - **Couvre la loi Exponentielle** et approche la loi Normale pour β proche de 3,6.
 - De plus, Weibull couvre un grand nombre de distributions empiriques.
- **Birnbaum-Saunders** ou la **loi de la fatigue** très utilisée :
 - bien adaptée à un mode de défaillance (fissure) dû au phénomène de fatigue.
- **Log-Normale** : pas très pratique car associée à un taux de défaillance nul à l'origine puis croissant au maximum puis tend vers 0 pour de grandes valeurs de t ,
 - ce qui n'est pas toujours vrai en pratique, ni en électronique, ni en mécanique.

Récapitulatif de 3 lois (les plus) usuelles

loi aléatoire	application fiabilité	loi exponentielle	loi normale	loi de Weibull
densité proba	densité défaillance U(t)	$\lambda exp^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2(\frac{t-m}{\sigma})^2}$	$\frac{\beta(t-\gamma)t^{\beta-1}}{\sigma^{\beta}}e^{-(\frac{t-\gamma}{\sigma})^{\beta}}$
fonction répartition	$\overline{R}(t)$	$1 - exp^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^t e^{-1/2(\frac{t-m}{\sigma})^2}$	$1 - e^{-(\frac{t-\gamma}{\sigma})^{\beta}}$
	taux défaillance	λ	$U(t)/R(t)$	$\frac{\beta(t-\gamma)t^{\beta-1}}{\sigma^{\beta}}$
$f(t) = U(t)$				
$F(t) = \overline{R}(t)$				
$\lambda(t)$				

1.14.12 Où en sommes nous ? : la suite

- Une fois le modèle choisi, le problème d'estimation de ses paramètres se pose.
 - Habituellement, on procède en 2 manières :
 - 1- Calcul de la valeur ponctuelle du paramètre recherché : simple à manipuler
 - 2- Estimation d'un **intervalle de confiance** qui contient le paramètre recherché et reflète la confiance accordée à l'estimation.
- La figure 1.7 (page 68) est un exemple.
- Suite : → **Modélisation Bayésienne**

1.15 Estimateurs : Méthodes ponctuelles

- La modélisation Bayésienne procède par : $a \text{ posteriori} \propto a \text{ priori} \times \text{vraisemblance}$
- Pour estimer la *vraisemblance*, on peut utiliser deux méthodes :
 - *maximum de vraisemblance* (optimisation de la vraisemblance) et
 - la méthode de *moindre carrés* (minimisation de l'erreur quadratique).
 - Connue mais pas traité ici.
- Exemple de calcul : **Exemple vraisemblance**
- Nous verrons la **Méthode Bayésienne** plus loin...
 - La maximisation de la vraisemblance peut être employée sur les données REX.
- Suite : **la Méthode Bayésienne**

1.15.1 *Estimation par la méthode du max de vraisemblance*

- Méthode académique, efficace au sens statistique
- Est *asymptotiquement* sans biais :
 - l'espérance de l'estimateur = le paramètre estimé (où la variance de l'estimateur est faible).
- La distribution de l'échantillonnage est supposée Normale.
 - On calcule un intervalle de confiance avec le paramètre estimé par cette méthode.
- Ci-dessous, on étudie cette méthode avec les différents type d'échantillons

1.15.2 Maximum de vraisemblance avec échantillon complet

- Si on dispose d'un échantillon $T = t_1, \dots, t_n$ de n variables aléatoires, indépendantes de la durée de vie $T \geq 0$, la loi de probabilité du n -échantillon (pour avoir tous les n éléments défailants) est donnée par la vraisemblance (*Likelihood*) :

$$\mathcal{L}_{(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta)} = \prod_{i=1}^{i=n} f_{(t, \Theta)} = \mathcal{L}(T, \Theta)$$

- On choisit ensuite l'estimateur $\hat{\Theta}$ de Θ qui rend maximale la densité de probabilité du n -uplet (T_1, T_2, \dots, T_3) .

d'où
$$\frac{\partial \mathcal{L}(T, \Theta)}{\partial \Theta} = 0$$

- Si plusieurs paramètres $\Theta : (\Theta_1, \Theta_1, \dots)$ à estimer, ils seront les solutions du système

$$\frac{\partial \mathcal{L}(T, \Theta_1)}{\partial \Theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}(T, \Theta_i)}{\partial \Theta_i} = 0$$

../..

- On vérifiera que $\frac{\partial \mathcal{L}^2(T, \Theta_i)}{\partial \Theta_i^2} \neq 0$ et $\frac{\partial \mathcal{L}^2(T, \Theta_i)}{\partial \Theta_i^2} < 0$ pour un maximum.
- L'estimateur obtenu est Asymptotiquement non biaisé, efficace, obtenu par la règle du maximum de vraisemblance (si elle existe).
- NB : pour faciliter les calculs, on peut utiliser le *log-vraisemblance* :

$$L_{(T,\theta)} = \ln \mathcal{L}_{(T,\theta)}$$

Avec

$$\frac{\partial L(T, \Theta_1)}{\partial \Theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial L(T, \Theta_i)}{\partial \Theta_i} = 0$$

- Estimateur du Maximum de Vraisemblance (*EMV*) de θ sera alors $\text{argmax}_{\theta}(\ln \mathcal{L}_{(T,\theta)})$

1.15.3 *Maximum de vraisemblance avec échantillon incomplet*

Le cas précédent : n données sur des éléments tous défailants.

→ Ce cas n'est pas le cas le plus courant dans l'industrie.

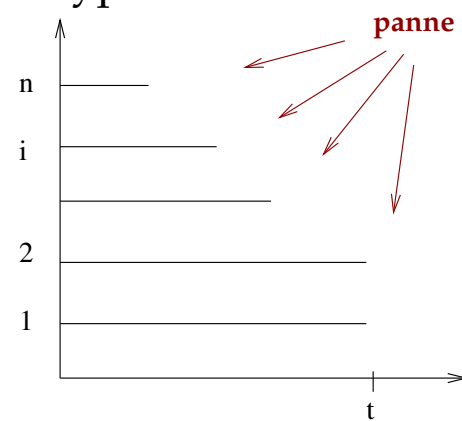
- Il arrive plus fréquemment que l'on arrête un essai au bout d'un certain temps t_c , sans que tous les éléments soient totalement défailants.

→ On a donc un échantillon **censuré (à droite type I)**

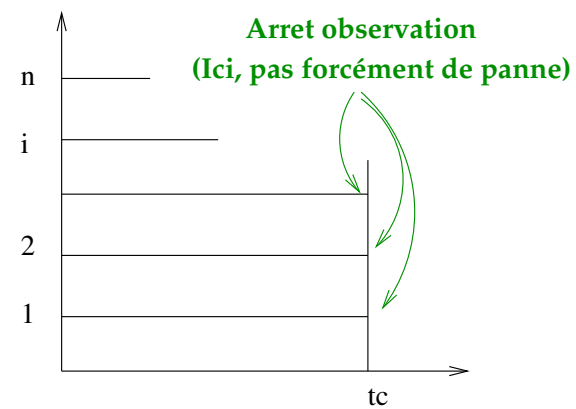
- Les données REX sont souvent censurées, avec des instants de censure différents.

→ Voir figure suivante pour un rappel des différents types de censure.

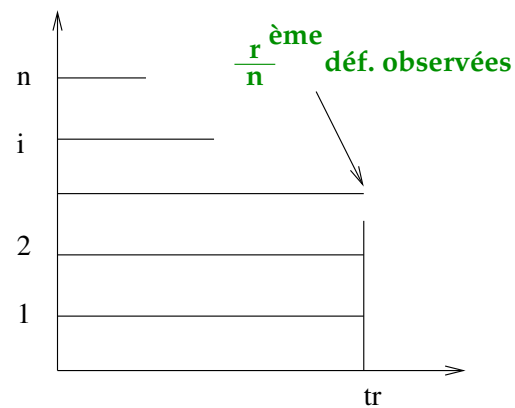
• Rappel : différents type de données :



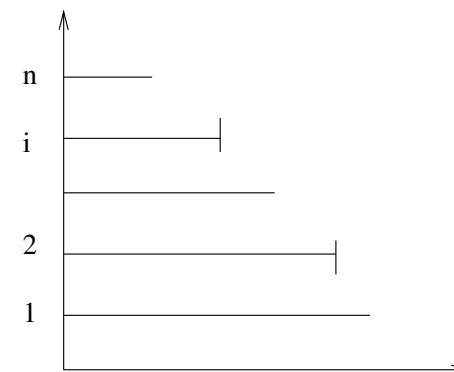
(a) Echantillon complet



(b) Echantillon censuré sur t_c à droite



(c) Censuré sur rème défaillance



(d) Censuré aléatoirement à droite

1.15.4 Vraisemblance et Données censurées sur le temps t_c , type I (b)

- On arrête l'observation au temps t_c précisé d'avance.
 - Sur un n -échantillon, on a $k < n$ défaillants.
 - Correspond aux démos de fiabilité où les essais s'arrêtent à une date fixe.
 - La fonc. de vraisemblance des éléments défaillants est réalisée par la PDF ($f(t)$);
 - ➔ pour les non défaillants, on utilise la fonction de fiabilité ($R(t) = 1 - F(t)$).
 - La densité conjointe s'écrit alors (couples indépendants) d'où \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_{((y_1, \delta_1), (y_2, \delta_2), \dots, (y_n, \delta_n))\theta} = \prod_{i=1}^{i=n} R^{1-\delta_i}(y_c, \Theta) \cdot f^{\delta_i}(y_i, \Theta)$$

Où $\delta_i = 0$ si l'élément est censuré (non tombé en panne)

$\delta_i = 1$ si l'élément est non censuré (tombé en panne)

1.15.5 Données censurées sur la r^{eme} défaillance, type I (c)

- Arrête des observations au bout de r défaillances, r précisé d'avance.
- Correspond en pratique aux essais dont le but est de démontrer **un % de défaillances**
- La fonction de vraisemblance des éléments défaillants est réalisée par la PDF ($f(t)$);
 → pour les non défaillants, au temps t_r , on utilise la fonction de fiabilité ($R(t)$).
- La fonction de vraisemblance = probabilité conjointe d'observer le n-uplet d'échantillon :

$$\{(t_1, \delta_1 = 1), \dots, (t_r, \delta_r = 1), (t_r, \delta_{r+1} = 0), \dots, (t_r, \delta_{r+2} = 0), (t_r, \delta_n = 0)\}$$

Avec δ = indicateur de censure (0 : censuré).

- On a la vraisemblance (statistique d'ordre) :

$$\mathcal{L}_{(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta)} = \frac{n!}{(n-r)!} (R(t_r))^{n-r} \prod_{i=1}^{i=r} f(t_i, \theta)$$

Remarque : on ajoute en général un intervalle de confiance au calcul précédent.

→ C'est différent de la méthode de calcul par intervalle citée plus haut.

Autres cas de censures :

- Cas censure aléatoire : compliqué,
- Méthode d'estimation par Intervalle ... compliquée ... pas dans le cadre de ces séances!
- Est-ce fini ? non !
- Voyons un exemple concret de prévision
Puis la méthode statistique Bayésienne

1.16 Modélisation Bayésienne

- **Constat** : difficulté d'obtenir des données fiables en Fiabilité ainsi que les infos sur les équipements.
- **Motivations** : obtenir un taux de défaillance pertinent à partir du matériel similaire (renseigné par des BDF) + calculs (REX).
- La méthode Bayésienne permet de combiner des données hétérogènes .
- Dans une démarche Bayésienne, on a besoin de :
 - **A priori** : donnée par les experts du domaine mais avec une marge d'incertitude.
 - **La vraisemblance** à partir des données recueillies
- Donneront $\boxed{\text{A posteriori} \propto \text{A priori} \times \text{Vraisemblance}}$.
- La méthode permet de prédire, inférer, faire une meilleure estimation de l'*a priori*.

L'apport de l'analyse Bayésienne ?

Règle de Bayes :

$$\Pr[H \mid E] = \frac{\Pr[E|H] \times \Pr[H]}{\Pr[E]}$$

- $\Pr[E]$: la **croissance** = une idée de la proba **a priori** (de préférence sans les données)
- $\Pr[E|H]$: la **vraisemblance** du modèle observé (avec les données)
- On obtient la probabilité **a posteriori** (permet de réviser la proba a priori).

☞ Prédiction de Fiabilité

- Le calcul du taux de défaillance est complété par un intervalle de tolérance (ou *facteur d'erreur*).

Dans cette démarche :

- Ce qui est **innovant** ici (pour déterminer un taux de défaillance) :

Utiliser des données REX des BDs diverses dans un cadre d'apprentissage.

Hypothèses faites pour la Bayésienne

1. Taux de défaillance constante du fait de la méconnaissance de la chronologie des défaillances.
2. Les maintenances préventives sont supposées être efficaces.
3. Les sources, une fois pondérées, ont la même qualité d'information

A propos des données :

- Les données locales (à pondérer) reflètent des conditions d'utilisation.
- Certaines données sont pondérées, par exemple selon le degré de similarité du matériel.
 - Il faut alors pouvoir quantifier l'information apportée par chaque source.

1.16.1 Modes et modèles de fonctionnement

- On différencie les matériels en **fonctionnement continu** du matériel **fonctionnant à la sollicitation**.

• Pour les matériels dont la sollicitation est **continue** (= fonctionnement continu), la **vraisemblance** est modélisée par une loi **exponentielle**.

• Pour les systèmes qui fonctionnent à la **sollicitation** (à la demande), la **vraisemblance** est modélisée par une loi **Binomiale** (cf. l'exemple précédent)

→ Cette loi décrit un phénomène ayant des occurrences s'excluant mutuellement (états défaillant ou non défaillant), donc **Binomiale**.

Rappels du théorème Bayésien : $a \text{ posteriori} \propto a \text{ priori} \times \text{vraisemblance}$

L'a priori ne devrait pas être déduite des données (si possible).

→ *A priori* sera la loi de distribution donnée par les experts (constatée).

- Éléments importants (cas réels d'application Bayésienne) :

On distingue les cas suivants (et selon les données disponibles) pour équilibrer les calculs entre la vraisemblance et l'a priori donnant → *A posteriori* :

I) Sources peu informatives : on privilégie la vraisemblance.

II) Sources plus informatives : on augmente l'importance de l'a priori

III) Sources très informatives : on peut trouver tous les paramètres de la distribution effective.

1.16.2 Éléments de la modélisation Bayésienne

On étudie les différents modèles utilisés en fonction du type de fonctionnement et le degré d'information des sources :

- Fonctionnement **en continu** :

- Distribution vraisemblance **Exponentielle**

- Calcul de la probabilité **a priori** :

- Méconnaissance (source) : *uniforme non informative*

- Peu de connaissance : *uniforme informative* (deux valeurs extrêmes)

- Bonne connaissance : loi **Gamma**

N.B. utilisation du principe de Conjugaison *Exponentielle - Gamma*

- Fonctionnement à la **sollicitation** :
 - Distribution vraisemblance **Binomiale**
 - Calcul de la proba **a priori** :
 - Méconnaissance (source) : *uniforme* non informative
 - Peu de connaissance : *uniforme* informative (deux valeurs extrêmes)
 - Bonne connaissance : loi **Bêta**

Conjugaison *Binomiale* - *Bêta*

Les deux exemples suivants examinent les 2 cas.

../..

1.17 Vers le calcul Bayésien

1.17.1 Vraisemblance (L) de défaillance en fonctionnement *continu*

Selon les hypothèses de départ, la vraisemblance est modélisée par une loi **exponentielle** :

$$\mathcal{L}(n, t|\lambda) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda \cdot e^{-\lambda t_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda T}$$

Où n = nombre de défaillances,

λ = taux de défaillance en continue,

T = temps de (bon) fonctionnement cumulé ($T = \sum_{i=1}^n t_i$).

- Nous avons donc notre **vraisemblance** que l'on notera dans la suite par $\ell(T|\lambda)$.
- On distingue maintenant le degré d'information disponible (pour le choix de la loi **a priori**)

1.17.2 Loi a priori pour le fonctionnement continu

1.17.2.1 Méconnaissance : non informative

- Les différentes sources de données n'apportent pas d'info sur le taux de défaillance.

→ On utilise une loi uniforme non informative :

$$\ell(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0}; & \lambda_0 \in]0; \infty] \\ 0, & \lambda_0 = 0 \end{cases}$$

Le théorème de Bayes s'écrit alors : (Rappel $\ell(\lambda|T) = \frac{\ell(T|\lambda).\ell(\lambda)}{\sum \dots = \ell(T)}$)

$$\ell(T|\lambda) = \frac{\lambda^k . e^{-\lambda.T}}{\int_0^{\lambda_0} \lambda^k . e^{-\lambda.T} . d\lambda}$$

Après simplifications, on obtient $\ell(\lambda|T) = \frac{T^{k+1} . \lambda^k . e^{-\lambda.T}}{\Gamma(k+1, \lambda_0.T)}$

L'espérance de cette distribution = **l'estimateur du taux de défaillance** :

$$\hat{\lambda} = \frac{\Gamma(k+2, \lambda_0.T)}{T.[\Gamma(k+1, \lambda_0.T)]}$$

Et sa variance :

$$Var(\lambda|T) = \frac{\Gamma(k+3, \lambda_0.T) \cdot \Gamma(k+1, \lambda_0.T) - \Gamma^2(k+2, \lambda_0.T)}{T^2 \cdot \Gamma^2(k+1, \lambda_0.T)}$$

Rappel : $\Gamma(s, x)$ est dit une fonction gamma incomplète et on a (il existe plusieurs définitions) :

$$\Gamma(s, x) = \Gamma(s) - \gamma(s, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

→ $\Gamma(s, x)$ est appelée le haut (upper) Gamma et $\gamma(s, x)$ est appelée le bas (lower) gamma.

On a donc également : $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ et $\gamma(s, x) = \int_0^x e^{-t} t^{s-1} dt$

→ Plus exactement, s'agissant de la fonction *Gamma*, on utilise Γ pour *upper* et γ pour *lower*.

→ A noter : $\frac{\partial \Gamma(s, x)}{\partial x} = -x^{s-1} e^{-x}$

1.17.2.2 Peu de connaissance a priori

- Le déficit de connaissances impose de modéliser l'a priori par une loi uniforme informative.
- On est dans le cas d'un intervalle borné et toutes les valeurs possibles de la probabilité sont équiprobables sur cet intervalle.

$$\ell(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} & ; \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \\ 0 & ; \lambda \notin [\lambda_0, \lambda_1] \end{cases}$$

- La forme générale de Bayes :

$$\ell(\lambda|T) = \frac{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot T}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot T} \cdot d\lambda} = \frac{T^{k+1} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda \cdot T}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 \cdot T) - \Gamma(k+1, \lambda_0 \cdot T)}$$

Et

$$\hat{\lambda} = \frac{\Gamma(k+2, \lambda_1 \cdot T) - \Gamma(k+2, \lambda_0 \cdot T)}{T \cdot [\Gamma(k+1, \lambda_1 \cdot T) - \Gamma(k+1, \lambda_0 \cdot T)]}$$

1.17.2.3 Bonne connaissance a priori

- On est dans le cas le plus informatif :
 - Modèle de la distribution **Gamma** pour le taux de défaillance final en continu.
- La loi Gamma est intéressante dans ce cas car elle permet de représenter les 3 phases (courbe en baignoire) d'un système.

- Loi *a priori* Gamma :

$$\ell(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}$$
- L'hypothèse d'une vraisemblance **exponentielle** permet de pratiquer la **conjugaison Gamma**.
 - La défaillance *a posteriori* en obtenant les paramètres de la loi Gamma finale :

$$\ell(\lambda|T) = \left(\frac{1}{\beta} + T\right)^{\alpha+k} \cdot \lambda^{\alpha+k-1} \cdot e^{-\lambda\left(\frac{1}{\beta}+T\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha+k)}$$

- **Voir l'exemple** Poisson-Gamma en Annexes

1.18 Probabilité de défaillance à la sollicitation

- La distribution recherchée est celle du nombre k de défaillances sur N sollicitations.
 - La probabilité de défaillance p suit une distribution **Binomiale** que l'on utilisera pour la fonction de **vraisemblance**.

$$f(k|p) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \quad \text{avec } N \text{ connu et } p \in [0, 1]$$

- Les 3 cas informatifs précédents se présentent.
 - Pour obtenir l'a priori.

1.18.1 Méconnaissance : loi uniforme non informative

$$\ell(p) = \begin{cases} 1; & p \in [0, 1] \\ 0; & p \notin [0, 1] \end{cases}$$

On obtient la formule de Bayes (k : nb. défaillances, N : nb sollicitations, p : proba de défaillance) :

$$\ell(p|k) = \frac{f(k|p) \cdot \ell(p)}{\sum \dots = \ell(k)} = \frac{p^k \cdot (1-p)^{N-k}}{\int_0^1 p^k \cdot (1-p)^{N-k} \cdot dp} = \dots = \frac{p^k \cdot (1-p)^{N-k}}{\beta(k+1, N-k+1)}$$

→ C'est donc une loi **Bêta** de paramètres $b = N - k + 1$ et $a = k + 1$

$$\text{L'espérance : } E(p|k) = \frac{k+1}{N+2} \quad \text{et sa variance } Var(p|k) = \frac{(k+1) \cdot (N-k+1)}{(N+3) \cdot (N+2)^2}$$

1.18.2 *Peu de connaissance a priori*

Similaire au fonctionnement continu :

$$\ell(p) = \begin{cases} \frac{1}{p_1 - p_0} & ; p \in [p_0, p_1] \\ 0; & p \notin [p_0, p_1] \end{cases}$$

On obtient la formule de Bayes :

$$\ell(p|k) = \frac{p^k \cdot (1-p)^{N-k}}{\int_{p_0}^{p_1} p^k \cdot (1-p)^{N-k} \cdot dp} \cdot \ell(p)$$

L'intégration donnera(exprimée par Gamma Incomplète)

1.18.3 *Bonne connaissance a priori*

- Loi **Bêta** pour l'a priori

→ Elle est conjuguée de la même famille que la vraisemblance **Binomiale**.

$$\ell(p) = \frac{p^{a-1} \cdot (1-p)^{b-1-k}}{\beta(a, b)}$$

On obtient la formule de Bayes :

$$\ell(p|k) = \frac{p^{a+k-1} \cdot (1-p)^{b+N-(k+1)}}{\beta(a+k, b+N-k)}$$

→ **Voir un autre exemple** Binomiale-Beta en Annexes

1.19 Résumé du calcul Bayésien

Rappel : on a vu (dans les pages précédentes) les différents modèles utilisés en fonction du type de fonctionnement et le degré d'information des sources disponibles :

- Fonctionnement **en continu** → distribution *vraisemblance* **Exponentielle/Poisson**

à la **sollicitation** → distribution *vraisemblance* **Binomiale**

Éléments de la probabilité *a priori* :

- Méconnaissance (source) : uniforme non informative
- Peu de connaissance : uniforme informative (deux valeurs extrêmes)
- Bonne connaissance : **en continu** → **Gamma**

à la **sollicitation** → **Bêta**

- N.B. utilisation de principe de Conjugaison (pour *a posteriori*)

Exponentielle/Poisson - Gamma ou *Binomiale - Bêta*

1.20 Un exemple d'analyse Bayésienne : sollicitation

- Rappel du contexte de l'exemple : données sur les générateurs d'urgence (moteur diesel) utilisés en dépannage dans une centrale nucléaire (cf. refroidissement des bassins).

→ On a observé leur comportement (démarrage ou non) lors d'une sollicitation dans la situation de remplacement d'urgence.

- Fonctionnement à la sollicitation : distribution **Binomiale**.

☞ Cas de test d'un nombre fixe n de composants testés (test indépendants) avec une proba invariable de succès π .

- La fonction de densité de probabilité dans ce cas : $f(x|n, \pi) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$

Où $0 \leq \pi \leq 1$ = la proba de succès, pour x (parmi n) succès observés.

- Ce modèle de succès/échec exprime la fonction de **vraisemblance** de π pour x succès observés

- Dans le cas de sollicitation, la fonction de proba *a priori* est une distribution (conjuguée) **Beta** :

$$p(\pi|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \pi^{\alpha-1}(1 - \pi)^{\beta-1} \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

→ Avec α le nbr *a priori* de succès des composants testés et β le nbr *a priori* des échecs ;

→ Donc $\alpha + \beta$ est comme la taille *a priori* des données (la BD de référence).

La prédiction (ajustement de l'*a priori* → *a posteriori*) de π est de la forme (conjugaison) :

$$p(\pi|x) \propto \text{Beta}(\alpha + x, \beta + n - x) = \pi^{\alpha+x-1} (1 - \pi)^{\beta+n-x-1}$$

☞ L'expression conditionnelle $p(\pi|x) \propto \dots$ suffit pour la comparaison des deux distributions.

Détails des données des générateurs de secours

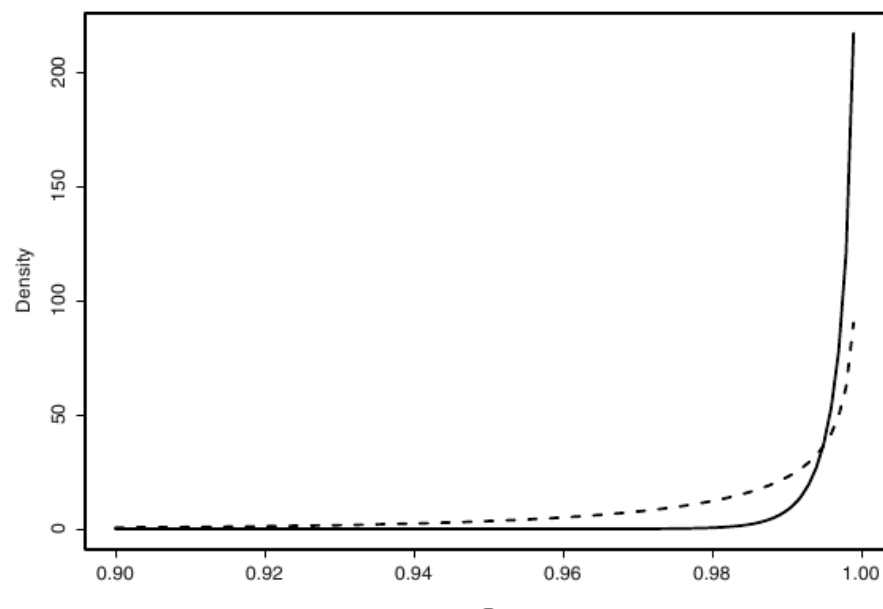
- Les données (*USA nuclear power plants*) sur une centrale nucléaire (n° 63) sont :
 - **ReX** : $x = 212$ succès au démarrage sur 212 sollicitations de générateurs (tests).
 - **A priori** : cependant, les données de la centrale de référence (n° 62) donnent 273 démarrages avec succès sur 278 (donc 5 échecs) MAIS on dispose seulement des 10% de ces données.

- Dans ce cas, la 62 (la référence) génère une distribution *a priori* pour la probabilité de succès π :

$$Beta(\alpha = (273/278)/27.8, \quad \beta = (1 - 273/278)/27.8)$$

- De la distribution *Beta* (*a posteriori* vue plus haut), la probabilité π pour la centrale 63 sera :

$$Beta(\alpha + x, \beta + n - x) = Beta(239.3 = (273/278)/28.3 + 212, 0.5 = (1 - 5/278)/28.3 + 0)$$



La figure : les distributions *a priori* et *a posteriori* pour la probabilité de succès π

- ligne pointillée : distribution *a priori*
- pleines : la distribution *a posteriori*

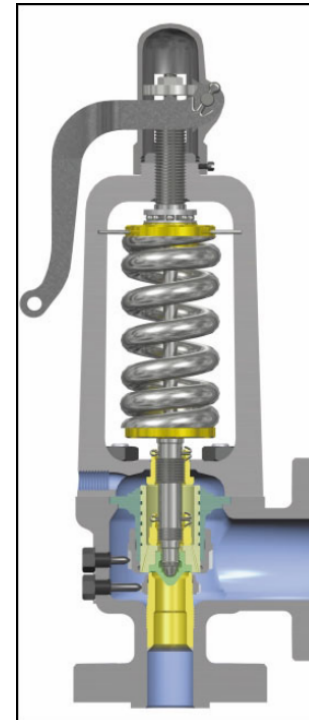
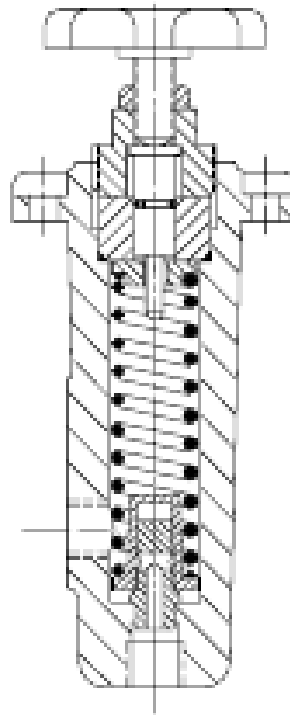
→ La distribution *a posteriori* (lignes pleines) est plus piquée que l'*a priori* (pointillée) :

Les données montrent une évidence en faveur d'un taux de succès élevé.

1.21 Application aux Soupapes de sureté

- Dispositif de sécurité (deux modèles) :

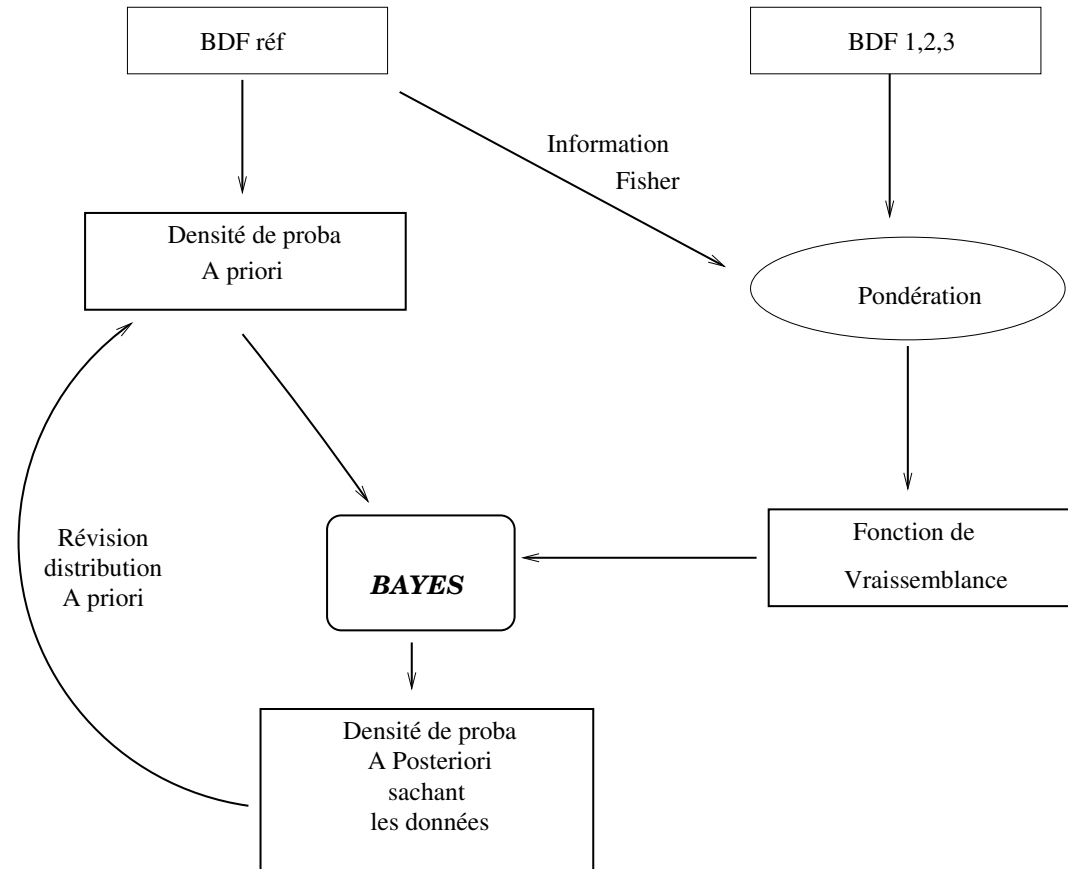
Vue en coupe



- Modes / Causes de défaillances :
 - Les manipulations dégradant les réglages (transport, maintenance).
 - La corrosion
 - Surface des sièges endommagées (usure)
 - Défaillance ressort (fatigue)
 - Colmatage et blocage
- Ces défaillances provoquent de la fuite, vibration en fonctionnement, manque d'ouverture à la pression indiquée, manque de fermeture....
- D'autres défaillances peuvent être provoquées par le milieu d'utilisation :
 - température, milieu chimique, support vibrant, chocs, immersion...

1.21.1 Application de la méthode Bayésien

- Données REX : on a disposé de 4 BDs dont une de **référence**.



- Les BDFs REX :

Fonctionnement continu	OREDA	EIReDA	NPRD95	INERIS (ref°)
Tps opérationnel cumulé $\times 10^6$ heures	0,69		61,64	31,79
nbr défaillances	19		2001	1479
Taux défaillance moyen donné ($\times 10^6$)	29,35	6,1	32,46	46,52
Intvlle. de tolérance ($\times 10^6$) (ou Facteur d'erreur) : $= \text{Max}(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}, \frac{\lambda_{max}}{\lambda})$	[11,11 ; 54,66]	1,15		[45 ; 48,1]
degré de confiance	90%	60%		80%

1.21.2 *La modélisation soupape*

- Une fois les données recueillies, il faut trouver le modèle de **la loi de survie** et la fonction de **vraisemblance**.
- Qualité des données disponibles : bonne connaissances
 - La loi de survie (a priori) : mode continue, loi **Gamma**
- La fonction de vraisemblance :
 - On a ici un mode de fonctionnement **continu** .
 - La loi de survie est de type **exponentiel** et le paramètre à estimer λ .

1.21.3 La vraisemblance soupape (Exponentielle)

- Pour la base de données EIREDA, on a seulement un taux de défaillance moyen avec un intervalle de tolérance (facteur d'erreur).

→ On a : Facteur d'erreur = $Max \left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}, \frac{\lambda_{max}}{\lambda} \right)$

→ Dans l'hypothèse d'un intervalle bi-latéral, on aura $\frac{\lambda}{\lambda_{min}} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda} = 1,15$

→ D'où $\lambda \in [5, 3 \times 10^{-6} ; 7 \times 10^{-7}]$

→ Et avec un intervalle de confiance à 60% et sous l'hypothèse de distribution Normale de λ ,

on aura : $\lambda_{max} - \lambda_{min} = 2 \times 0.84.\sigma$

- Les deux premiers moments (paramètres) de la loi Gamma (finale) se calculent par :

$$\alpha = \beta.\lambda = 36 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda}{\sigma^2} = 5,96 \times 10^6$$

NB : on peut aussi obtenir α et β par la distribution χ^2 par approximations successives.

1.21.4 La distribution a priori soupape (Gamma)

- Matériel fonctionnant en continu,
- On dispose (sources) du temps cumulé de fonctionnement et du nombre de défaillances
 - Cas bonne information : on a vu que le modèle *a priori* utilisé est la distribution **Gamma**.
 - On utilisera la BDF d'INERIS à cet effet (BDF de référence).
- Si l'on considère que $\pi(\lambda)$ suit une distribution **Gamma** de paramètres (α, β) , on obtient (voir le tableau des BDs. sources précédent) :

$\alpha = k = 1479$ (nbr de défaillances) et $\beta = T = 31,79 \times 10^6$ (temps cumulés).

Rappel : pour une variable aléatoire X de distribution *Gamma* de paramètres α (entier) et β (MTBF), la densité de proba est la somme de α variables aléatoires exponentielles indépendantes

de probabilité $f(x_i) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x_i}{\beta}}$ (cf. conjugaison Gamma - Exp.)

1.21.5 *Pondérations des BDs*

- On a modélisé la distribution selon la BDF de référence (INERIS),
on pondère les autres BDFs pour obtenir de ces BDFs secondaires un échantillon comparable à celle de la BDF de référence
→ pour les cumuler et procéder à l'étape de calculs suivante.
- NB : pour déterminer les coefficients de pondération, on fait l'hypothèse que le taux ou la proba des défaillances est **constante** et que les distributions sont **conjuguées** (ce qui est le cas des BDFs utilisées où l'on utilise, comme distribution, des densités Exponentielle-Gamma ou Binomiale-Bêta, deux à deux conjuguées).
- On laisse les détails de cette pondération et on utilise ses résultats.

1.21.6 Taux de défaillance

La dernière étape : calculer la probabilité *a posteriori* du taux de défaillance (par Bayes)

→ pour obtenir les paramètres de la distribution *a posteriori* ainsi que son espérance et son intervalle de crédibilité.

- Ici, la fonction L de **vraisemblance** est *Exponentielle* : $L(n, T|\lambda) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot T}$

Et la distribution *a priori* (Gamma) a donné :

$$\ell(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}$$

- Le taux de défaillance pertinent a posteriori obtenu est : $\hat{\lambda} = \frac{\alpha_0 + n_{vrais}}{\beta_0 + T_{vrais}} = 23,66 \times 10^{-6}$

→ Les "vrais" taux sont obtenus après toutes les pondération des BDFs.

- L'intervalle de confiance calculé (par χ^2) sera :

$$\lambda_{min} = 23,28 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad \lambda_{max} = 24 \times 10^{-6}$$

- NB : sans l'étape de pondération des BDFs, on aurait obtenu $\hat{\lambda} = 35,42 \times 10^{-6}$

1.21.7 *Analyse des résultats*

- On procède toujours à une comparaison des courbes *a priori* et *a posteriori*.
 - Si les données sont informatives mais les deux courbes très différentes, on peut en déduire que la modélisation n'a pas été correcte ou bien elle a été peu précise.
 - Plus l'écart entre les deux courbes est important, plus il y a un risque d'erreur dans la modélisation d'*a priori*.
 - Dans ce cas, on procède à une modélisation simple fréquentielle classique (à la place de Bayésienne).
 - **Si l'*a priori* est mal estimée, l'*a posteriori* le sera aussi.**

Plus exactement : cela veut dire que les matériels sont très différents et une combinaison des données n'a alors pas de sens.

1.22 Autres méthodes

- Autres méthodes (non abordés ici) :

Modélisation paramétrique a Hasard proportionnel

Par les RN.

Par les RdP

....

1.23 Quelques références Bibliographiques (DM + fiabilité)

- Ce cours s'est inspiré de plusieurs documents sur l'Extraction de Connaissances ainsi que les outils employés (outils Mathématiques, Probabilité et Statistiques, etc.).
- Aussi, un nombre important d'articles et des rapports de recherche peuvent être consultés (<http://citeseer.ist.psu.edu/cs>).
- A titre d'indication, les ouvrages suivants peuvent être approfondis :

Data Mining : Introductory and Advanced Topics : Margaret H. Dunham. Prentice Hall 2002.

Data Mining : Concepts, Models, Methods and Algorithms. M. Kantardzic. IEEE 2001

Data Mining : A tutorial based primer. R.J. Roiger , M.W.Geatz

Principles of Data Mining : D. Hand, H. Manila, P. Smyth. MIT Press, Cambridge, 2001

Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels complexes : Gilles Zwingelstein, ENSEEIHT.

Modélisation et Evaluation de la Fiabilité des systèmes Mécatroniques : Alin Gabriel MIHALACHE , Thèse de Doctorat, 2007, Angers.

ET bien d'autres !

1.24 Annexes

1.24.1 *A propos de la SdF*

Pour la **Sûreté** : deux approches (de plus en plus complémentaires)

- Approche déterministe : on choisit un scénario parmi N qui englobe l'ensemble des contraintes.
- Approche probabiliste (**Très utilisé en France**) : évaluation prévisionnelle de la SdF en attachant une proba à chaque scénario. On évalue donc les risques.
- Dans les 2 cas : définir la fréquence des dangers identifiés
- **Pour évaluer la SdF, il faut connaître :**
 - L'architecture du système & les Conditions et l'environnement de son utilisation
 - Le modèle de défaillance du système ou de ses composants
 - proba pour chaque composant + loi de composition → loi de fiabilité du système
- **REX** : retour d'expérience : collecter, archiver, analyser....

1.24.2 *Différents types de censures*

1- Censurée à droite : on décide d'arrêter l'observation à la date Td .

- A cette date, le dispositif a eu / n'a pas eu de défaillance.
- La date Td est alors une donnée censurée à droite (ou tronquée à droite).
- données fréquemment récoltées pour les équipements de sécurité qui tombent peu en panne.

Deux types de données censurées à droite : (fig. ci-dessus à droite)

✓ **Type I** : un test se termine à un moment t donné.

- appelé simplement **censure à droite** car le temps de panne à droite est inconnu.
- On connaît alors le nombre de matériel défaillants, les moments des défaillances, le type de panne, ...

→ Le temps censuré est fixe, le nbr. des défaillances= une variable aléatoire

✓ **Type II** (peu courant, dit aussi **pourcentage** = percentile) :

- le test se poursuit jusqu'à ce qu'une proportion fixe du matériel échoue.
- Ici, le nbr de matériel ayant échoué est fixe et le temps est une var aléatoire.
- Très utile car on sait d'avance combien de pannes auront lieu
- Facilite la planification des tests mais impraticable si le temps n'est pas borné.

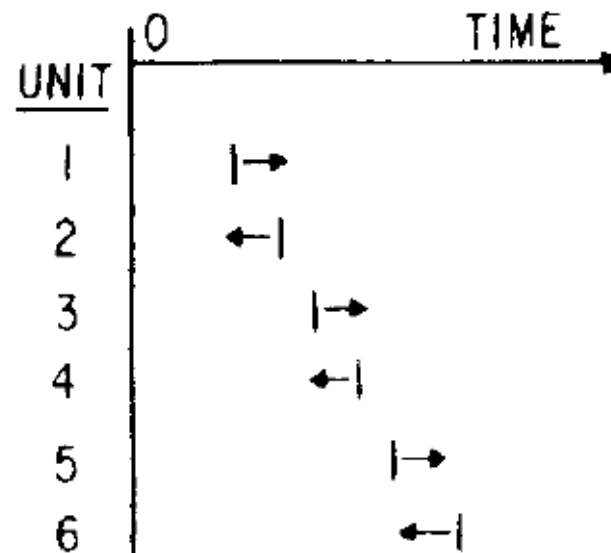


FIGURE 1.16 – |→ : continue à fonctionner, ←| : panne a eu lieu avant

2- Censuré à gauche : On observe le matériel à partir de la date T_g .

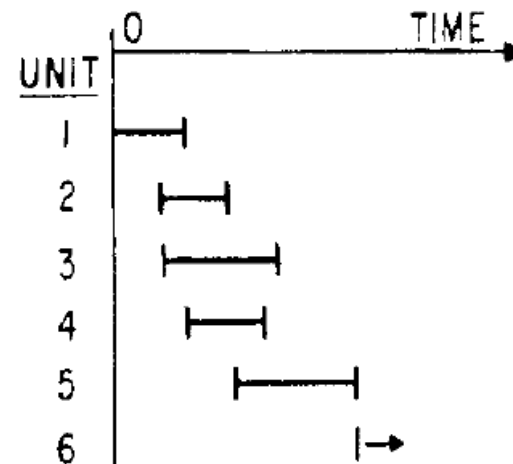
- On constate des pannes mais on ne connaît pas la date t de la défaillance
- On sait seulement que " t est inférieur à T_g ".

Exemple similaire : un patient entre à l'hôpital à une date T_g et survit un certain temps.

Mais l'on ne sait pas à quel moment les symptômes se sont présentés et ont été diagnostiqués la première fois.

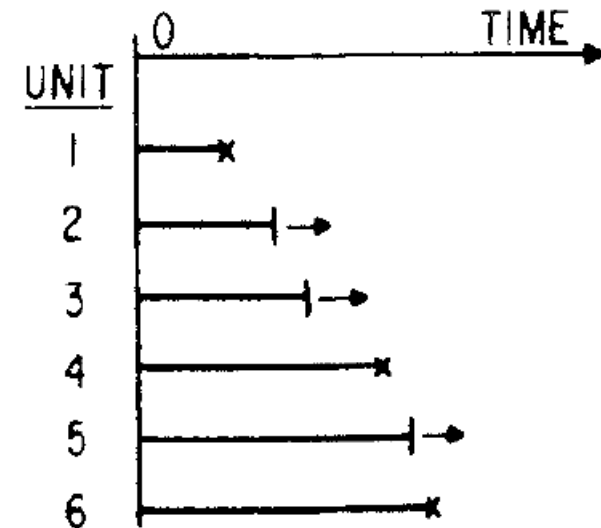
3- Censuré par intervalle :

Le dispositif a eu une défaillance entre T_g et T_d connues (mais pas le moment exact de la panne).



4- Censure multiple : la censure peut se produire à différents moments avec les situations :

- pas de panne pendant l'observation ou
- panne + le moment exact de la panne ou
- l'intervalle pendant lequel il y a eu défaillance
- on peut donc avoir des temps ou des intervalles différents pour différentes unités



5- Censure Simple : la censure se produit à un moment donné

6- Censure Aléatoire : la censure se produit à des moments aléatoires

1.24.3 Différents types de Maintenance

1.24.3.1 Maintenance Corrective

ABAO : la maintenance remet le système dans son état d'avant la panne.

- Le processus aléatoire correspondant est un processus **Poisson** *Non Homogène* (NHPP) :

→ l'intensité (λ , Poisson) de la défaillance est une fonction du temps et ne dépend pas du passé du processus : $\forall t \geq 0, \lambda = \lambda(t)$.

- La forme la plus utilisée de NHPP est le modèle PLP (*Power Law Process ou Douan*) où l'intensité est une puissance du temps : $\lambda_t = \alpha \cdot \beta \cdot t^{\beta-1}$ avec $\alpha, \beta > 0$

- Ce modèle est aux systèmes réparables ce que **Weibull** (voir plus loin) est aux systèmes non réparables : les paramètres caractérisent l'usure du système :

$\beta < 1$: amélioration ou rajeunissement

$\beta = 1$: stabilité

$\beta > 1$: usure ou vieillissement

- ABAO : l'origine du temps n'est pas modifiée et on ne prend pas en compte le temps de censure.

AGAN : le matériel est remis à neuf suite à une défaillance.

- L'origine du temps change : comme une date de mise en service (MSI)
- Le processus aléatoire correspondant est le processus de renouvellement (Perfect Renewal Processes PRP) :

→ l'intensité de la défaillance est de la forme : $\forall t \geq 0, \lambda_t = \lambda(t - T_{D_t})$.

Avec D_t : le nbr de défaillance observées entre l'instant initial et t

T_{D_t} : le temps entre la D^{eme} défaillance et l'instant t .

- Maintenance imparfaite et **âge virtuel** :

- entre les deux modèles ABAO et AGAN : le modèle d'âge virtuel.

- on considère que la **ième maintenance** rajeunit le système au sens où son intensité juste après T_i est égale à l'intensité initiale à l'instant A_i , $A_i < T_i$.

A_i est l'**âge virtuel du système** après la i ème maintenance.

- On a : $\forall t \geq 0, \lambda_t = \lambda(t - T_{D_t} + A_{D_t})$.

1.24.3.2 Maintenance Préventive

- Elle est faite pour réduire les défaillances et augmenter la fiabilité
 - Rend la *collecte de données* encore plus compliquée.
- Augmente la durée de vie *mais fausse* les résultats observés.
- 2 type de maintenance préventives : **conditionnelle et périodique.**
- Ce type de maintenance peut amener à d'autres défaillances non intrinsèques :
 - mauvais démontage/remontage, détérioration des pièces, ...
- Pour une analyse, il faut obtenir des infos sur les maintenances (type, lieu, date, raisons, détails déroulement, etc.)

Suite → Définitions

1.24.3.3 Liens avec la Modélisation

Pour la modélisation, il faut pouvoir obtenir des maintenances les infos suivantes :

- Les dates de défaillances et des maintenances correctives,
 - Les dates de censure (fin collecte ou fin observation)
 - Date opération maintenance préventive
 - Les dates d'origine : MSI ou les dernières AGAN
 - Détails des opérations pour toute opération de maintenance
- Souvent, on s'attend à des estimations **approximatives** du modèle si le temps exact de fonctionnement n'est pas connu (à cause de cette maintenance).

Remarque importante : les maintenances posent des problèmes aux données REX.

- Elle n'est jamais réalisée selon les cas idéaux ABAO ou AGAN.
- **A la limite** , on préfère ne pas maintenir un système à l'étude !

1.24.4 *Calcul de $F(t)$ à partir d'observations*

• **Estimation de F** : on peut obtenir une estimation de la fonction de répartition cumulée (quelque soit la répartition) en affectant un rang aux observations.

→ Exemple de la méthode **Rangs médians** : $F(t_j) = \frac{(j - 0.3)}{(n + 0.4)}$

où j =le rang (ordre temps croissant de pannes depuis le début des observations)

n = nbr total d'observations.

→ Pour des données multi-censurées, j =un ordre moyen pondéré des défaillances.

→ Une variante de la méthode **Rangs médians** : $F(t_j) = \frac{(j - 3/8)}{(n + 1/4)}$

• **Autres méthodes courantes**) :

→ **Rangs moyens** $F(t_j) = \frac{j}{n + 1}$

→ **Rangs bruts** $F(t_j) = \frac{j}{n}$

☞ Ces données sont ensuite utilisées pour tracer la courbe $F(t)$ (pour estimation)

→ Un exemple de calcul plus loin... (en section [1.24.5](#))

1.24.5 Exemple de calcul du taux de défaillance (d'avarie)

- Soit les observations suivantes (censures multiples vues comme 7 tests différents) :

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nb. éléments en vie (N_i)	13	9	6	4	2	1	0

- Entre t_3 et t_4 , il y a $N_3 - N_4 = 2$ avaries (au temps 1500, il restait 6, à 2000, il NE reste QUE 4) .

→ Le taux d'avarie entre t_3 et t_4 est $\frac{N_3 - N_4}{N_3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Entre t_4 et t_5 , le nombre d'avaries est $N_4 - N_5 = 2$.

→ Le taux d'avarie entre t_4 et t_5 est $\frac{N_4 - N_5}{N_4} = \frac{1}{2}$

- Taux moyen d'avarie par unité de temps :

→ $t_4 - t_3 = 500$: Le taux d'avarie étant de $1/3$ (33,3%), le taux moyen sera $\frac{33,3\%}{500} \approx 0,066\%$

→ $t_5 - t_4 = 500$: Le taux moyen sera $\frac{50\%}{500} \approx 0,1\% \dots \dots$ **taux moyen général $\approx 0.083\%$**

1.24.6 *Un autre exemple de calcul simple MTBF et MTTF*

- Supposons que 10 dispositifs sont testés pendant 500 heures.

→ Pendant ces tests, deux des produits tombent en panne (date non prélevée).

- Une estimation de **MTBF** est $\theta = \frac{10 * 500}{2} = 2,500 \text{ heures / panne.}$

→ N.B. : si les 10 étaient tombés en panne après 500h, le MTBF aura été = 500.

- Alors que le **MTTF** est $\gamma = \frac{10 * 500}{10} = 500 \text{ heures / panne}$ on regarde à la fin des 500 heures de test

- Si le MTBF est connu, on peut calculer le taux de défaillance comme l'inverse de MTBF.

→ Ce qui donne pour (le taux de défaillance λ) : $\lambda = \frac{1}{\theta} = \frac{r}{T}$ avec r =nbr de défaillances.

→ Pour les 2 pannes ci-dessus, $\lambda = \frac{r}{T} = \frac{2}{10 * 500} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{MTBF} = \frac{1}{2500} = 0,0004$

1.24.7 *Minimal Path et Cut Sets*

- En plus du diagramme de fiabilité et la fonction de structure, on utilise deux autres notions : **chemin minimal** (*minimal path*) et **ensemble de coupure** (*cut sets*) pour représenter la structure d'un système.

- **chemin minimal** d'un système : tout (vecteur) x pour lequel $\phi(x) = 1$;

- **ensemble de coupure** d'une structure : tout x pour lequel $\phi(x) = 0$.

→ L'ensemble des indices correspondant aux composants en fonctionnement (resp. défaillant) d'un *chemin minimal* (resp. *ensemble de coupure*) est appelé l'**ensemble du chemin** (resp **ensemble de coupure**).

- On note $y < x$ si $\forall i, y_i \leq x_i$ et pour certain $i \in \{1, 2, \dots, n\}, y_i < x_i$. (Rappel : x_i et y_i binaires.)

- Un vecteur de chemin x est un *vecteur de chemin minimal* si $\forall y < x, \phi(y) = 0$.

L'ensemble de chemin minimal est l'ensemble des composants en fonctionnement dans un *vecteur de chemin minimal* ;

→ C-à-d. : l'ensemble minimal des composants TOUS en fonctionnement qui permet au système de fonctionner ; mais tel que si un seul de ces composants défaillie, alors le système défaillie.

- Un vecteur de coupure x est un vecteur minimal de coupure si $\forall y > x, \phi(y) = 1$.

L'ensemble de coupure minimal est l'ensemble des composants en panne dans un *vecteur de coupure minimal* ;

→ C-à-d. : l'ensemble minimal des composants TOUS en panne mettant le système en panne ; mais tel que si un seul de ces composants fonctionne (et le reste du système hors cet ensemble fonctionne), alors le système fonctionne.

A l'aide de ces définitions, on peut définir la fonction de structure d'un système cohérent à partir de son *ensemble de chemin minimal* ou de son *ensemble de coupure minimal*.

Cas des ensembles de chemin minima

- Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ est la collection de TOUS les *ensembles de chemin minima* d'un système cohérent, avec x_i = état du *ieme* composant.

→ Le système fonctionne si tous les composants dans un ou plusieurs des ensembles de chemins fonctionnent.

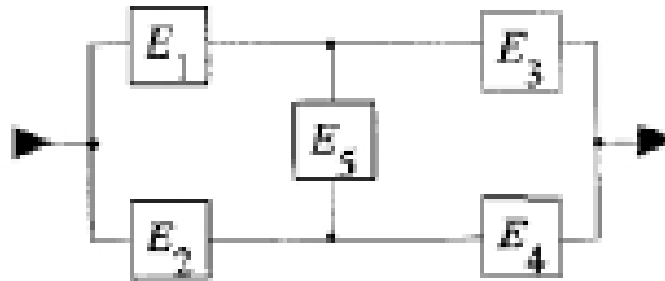
→ On peut considérer cela comme un arrangement parallèle de m ensembles de composants en série.

- En terme d'ensembles minima de chemins, la fonction de structure du système est donnée par

$$\phi(x) = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - \prod_{i \in a_j} x_i)$$

Exemple :

dans la figure suivante, les $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 5, 4\}$, $\{2, 5, 3\}$ sont des minimal-path-sets.

**minimal-path-set et RDB :**

minimal-path-set : un ensemble E de composants est un *minimal path set* si le système fonctionne ($x_i = 1$ quand tous les composants $x_i \in E$ et $x_j = 0$ pour tout $x_j \notin E$), mais que cette règle ne s'applique pas à tout sous-ensemble de E . B

cut-set minimal et FT :

ensemble tel que si TOUS les composants sont en panne, alors le système est en panne.

→ On refait le FT en plaçant un OR sur les cut-set minima.

Cas des cut-sets minima

- En terme de cut-sets, on a un résultat similaire.

→ Soit $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ la collection de tous les cut-sets minima d'un système cohérent où x_i donne l'état du composant i . Le système échoue si TOUS (pas un) les composants dans un ou plusieurs cut-sets échouent.

→ On peut donc considérer ce cas comme un arrangement en série de k ensembles de composants en parallèle. En termes des cut-sets minima, la fonction de structure du système est donnée par

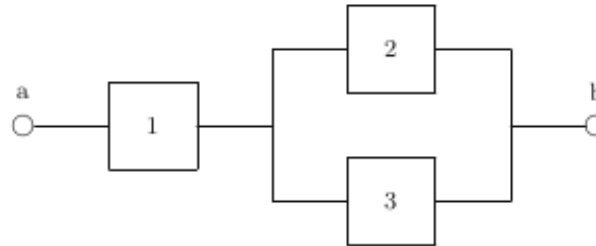
$$\phi(x) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - \prod_{i \in b_k} (1 - x_i)]$$

- NB : un système série avec C_1, C_2, \dots, C_n possède un path set et n cut-sets.

Un système parallèle $1 - of - n$ a un cut-set et n path-sets.

1.24.7.1 Exemple

Soit le diagramme (RBD)

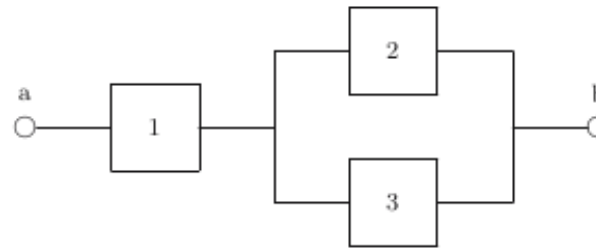


Les *ensembles de chemins minima* sont $a_1 = \{1, 2\}$, $a_2 = \{1, 3\}$.

→ En utilisant l'équation ci-dessus (pour *ensembles de chemins minima*), on a :

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= 1 - \prod_{j=1}^2 (1 - \prod_{i \in a_j} x_i) \\
 &= 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) \\
 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3
 \end{aligned}$$

- Rappel de la RBD :



- Les *cut-sets minima* pour le même système sont $b_1 = \{1\}$, $b_2 = \{2, 3\}$.

→ Rappel (cut-set minimal) : ensemble tel que si TOUS les composants sont en panne, alors le système est en panne.

→ En utilisant l'équation ci-dessus (pour *ensembles de chemins minima*), on a :

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= 1 - \prod_{i=1}^2 [1 - \prod_{i \in b_k} (1 - x_i)] \\
 &= 1 - (1 - x_1)(1 - (1 - x_2)(1 - x_3)) \\
 &= x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3) \\
 &= x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3
 \end{aligned}$$

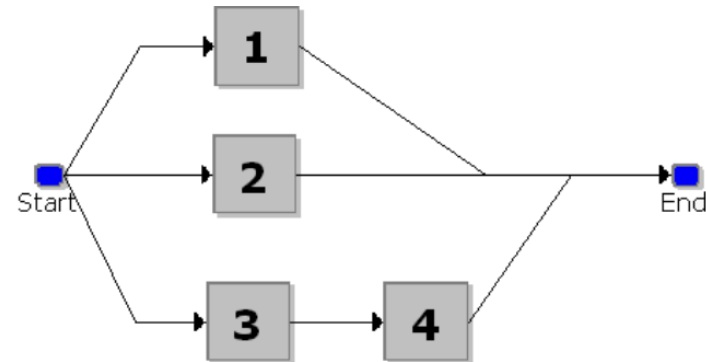
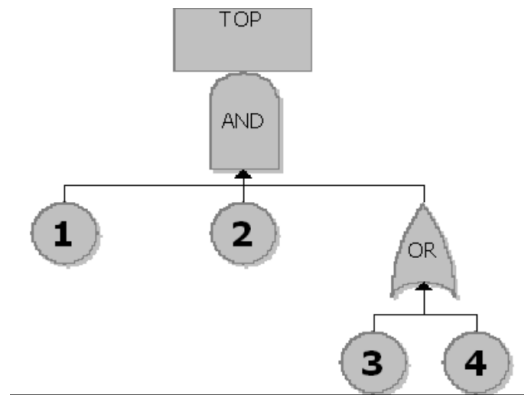
1.24.7.2 Résumé cut-set

- Les cut sets peuvent être calculés pour RBD et FT.
- **Cut sets** : combinaisons uniques de défaillance de composants qui peuvent causer la défaillance du système.
 - un cut set S est minimal si lorsque l'on supprime tout événement basic de S, alors le reste n'est plus un "cut set".
- On utilise le Minimal cut set pour comprendre la vulnérabilité structurelle des systèmes.
- Un Cut set minimal est utilisé pour obtenir une estimation de la fiabilité pour un RBD ou pour un FT des systèmes complexes où ces diagrammes ne peuvent pas être simplifiés en une combinaison de constructions plus simples (parallèle, série, k-out-of-n).

- Plus le Cut set minimal est longue, moins le système (ou TOP event dans FT) est vulnérable à cette combinaison d'événements.
 - La présence de multiples cut sets indique une plus grande vulnérabilité.
- On peut utiliser les *cut sets* pour découvrir les "single point failures" : un élément indépendant du système qui provoque un hasard immédiat qui peut mener à une défaillance du système.

1.24.7.3 Exemple 2 (de cut set)

- Soient le FT et son RBD :



Sur le FT :

Ce système échoue dans le cas d'échec de $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ ou $\{1, 2, 4\}$.

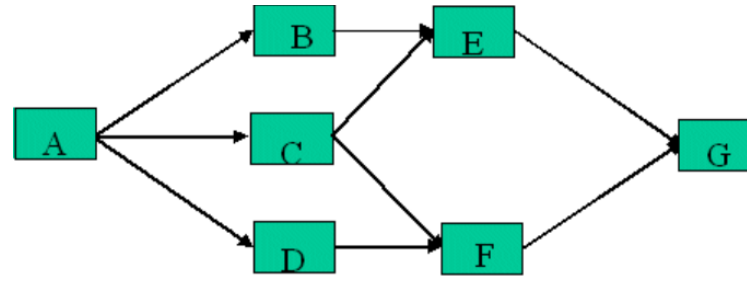
→ Les 3 ensembles sont des *cut sets* mais celui contenant les 4 composants n'est pas minimal car si l'on enlève 3 ou 4 de $\{1, 2, 3, 4\}$, alors le restant est encore un cut set.

→ Les ensembles $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 4\}$ sont minima.

→ On peut constater cela via le RBD équivalent.

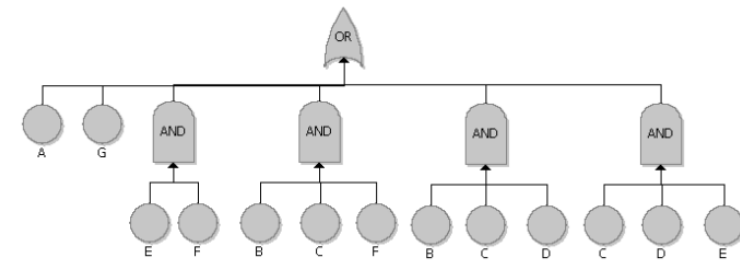
1.24.7.4 Exemple 3 (de cut set)

- Exemple de RBD d'un réseau de télécommunication :



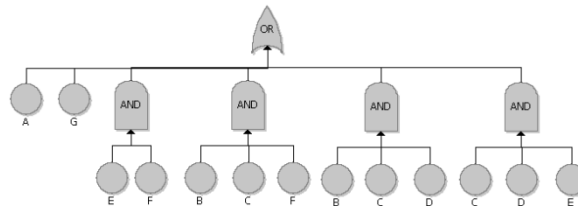
- La construction de FT peut être difficile mais plus simple à l'aide des cut-sets :
 - Les cuts-sets minima sont : $\{A\}$, $\{G\}$, $\{E, F\}$, $\{B, C, F\}$, $\{B, C, D\}$, $\{C, D, E\}$.
 - **TOUS les cut-sets minima** sont placés dans le FT en utilisant la porte OR.

Dans les ensembles contenant plusieurs blocs, ces derniers sont connectés par un AND.



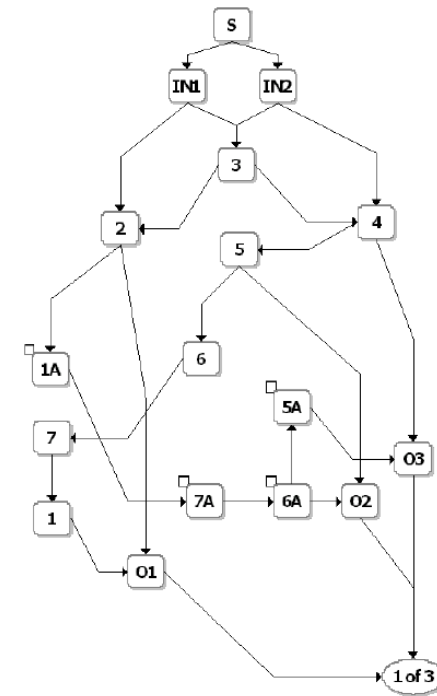
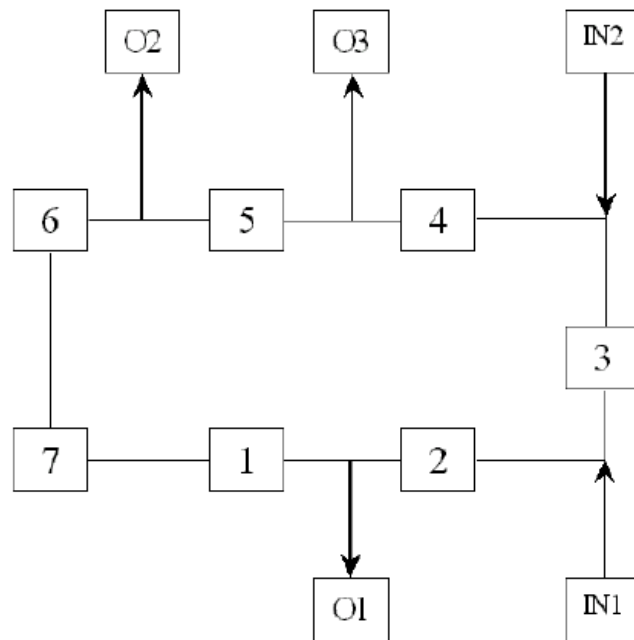
1.24.7.5 Blocs Miroirs

- Dans le FT, les événements B,C,D,E et F apparaissent plusieurs fois.
 - Si le FT est laissé comme tel, ces événements seront comptabilisés plusieurs fois comme si les événements avec le même nom seraient indépendants, pouvant survenir aux moments différents (NB : avoir le même nom ne les rend pas dépendants).
 - C'est une erreur courante lorsque on utilise les cut-sets.
 - Pour résoudre le pb et préciser que les evt du mm noms sont identiques pouvant survenir une seule fois mais affecter plusieurs parties du FT, on utilise les **blocs miroirs** (*mirror blocs*) dont la présence à différents endroits dans un FT veut dire qu'ils sont les mêmes événements.
 - Ce qui donne le FT équivalent :



Un Exemple (avec RBD) :

→ Un réseau électrique ou le système fonctionne si O1, O2 ou O3 fonctionnent.



A droite, le RBD de ce système avec des blocs miroirs. Les blocs 5A, 7A et 1A sont des duplications (**miroirs**) des blocs 5, 7 et 1..

1.24.8 Fiabilité et le cycle de vie

- Une vision équivalente (plus complète) :

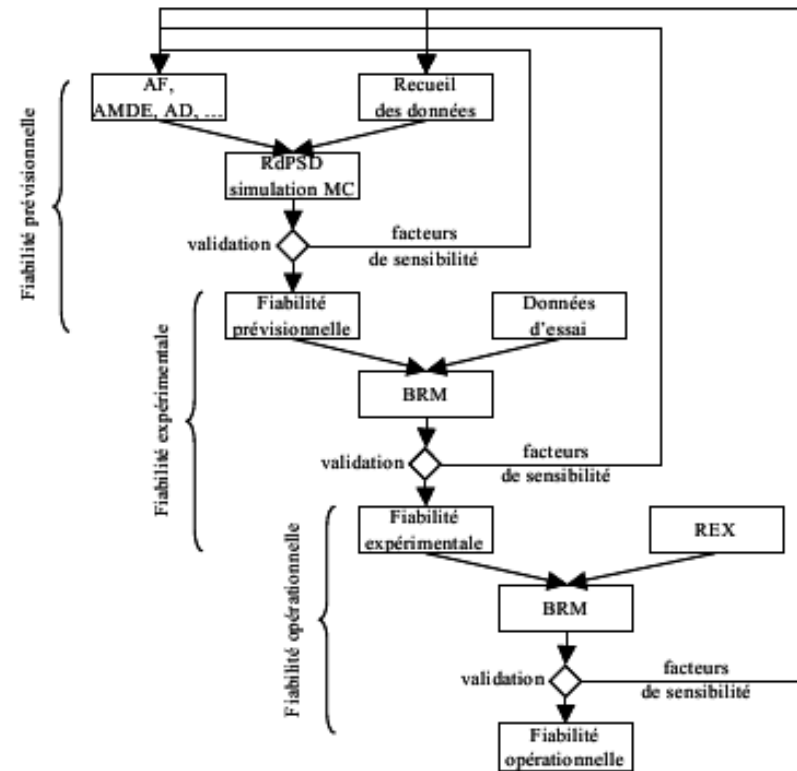
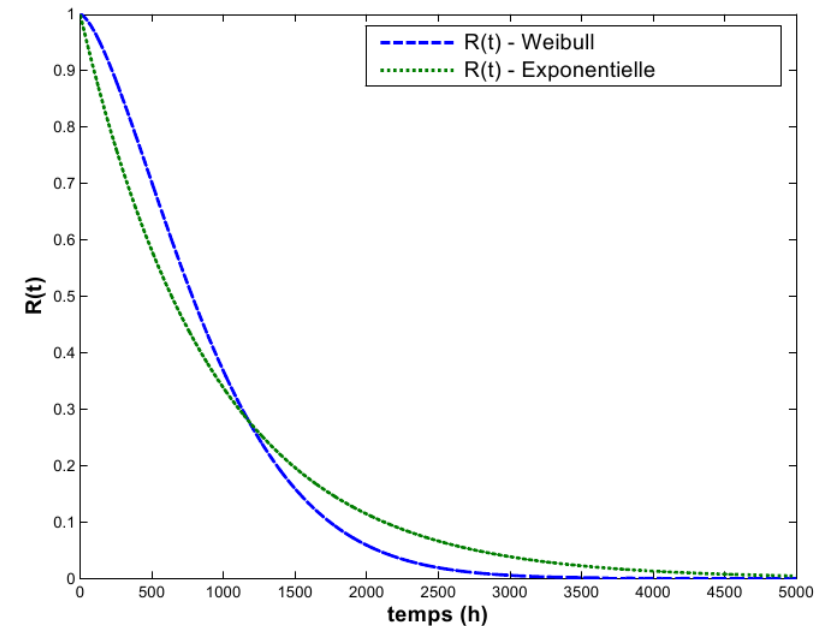


FIGURE 1.17 – Démarche globale de fiabilité

→ BRM : *Bayesian Restoration Maximization* utilisée si petits échantillons fortement censurés.

1.24.9 Ex Weibull : Simulation de modèles dysfonctionnels

- Tirage (MCL) de 1000 valeurs aléatoires d'instants de défaillance selon une loi de Weibull ($\beta = 1.5, \eta = 1000h$) (loi caractéristique) des composants mécaniques.
- A partir des instants de défaillance, on estime les paramètres de Weibull et la valeur moyenne du taux de défaillance.



- On utilise ces estimations pour représenter les lois de fiabilité Weibull et Exponentielle (avec le même taux de défaillance moyen λ_{moy}).
- La figure ci-dessus montre l'écart entre les deux lois.
 - ➔ Weibull est plus générale et ici on a une simulation des paramètres.

Correction de l'estimation à l'aide des données REX :

on définit les paramètres à l'aide des recueils de données (et de l'AMDEC, voir ci-dessous), η recalculé par REX.

- Par REX : le taux de défaillance moyen donne une information sur le paramètre d'échelle η ;
- Par l'AMDEC : informe sur le paramètre de forme β qui est associé au mode de défaillance.
 - Expertise : pour β , on peut utiliser la correspondance suivante entre les valeurs de β et les modes de défaillance :

Mode de défaillance	Valeurs de β
Fatigue	$\beta \in [1.5; 2.5]$
Usure, corrosion	$\beta \in [3; 4]$

N.B. **AMDEC** : Méthode Prévisionnelle d'Analyse qualitative des Modes de Défaillance de leurs criticités dans le but d'Evaluer les Conséquences des défaillances

- Le paramètre d'échelle η est estimé en considérant le **taux de défaillance moyen** qui est l'**inverse du MTBF** (= inverse de $E(t)$) :

$$\lambda_{moy} = \frac{1}{\eta \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})} \Rightarrow \eta = \frac{1}{\lambda_{moy} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}$$

→ N.B. : ici $\gamma = \text{le décalage} = 0$, η estimé à l'aide de λ_{moy}

- En reprenant l'exemple précédent, on obtient une loi de Weibull estimée correcte.

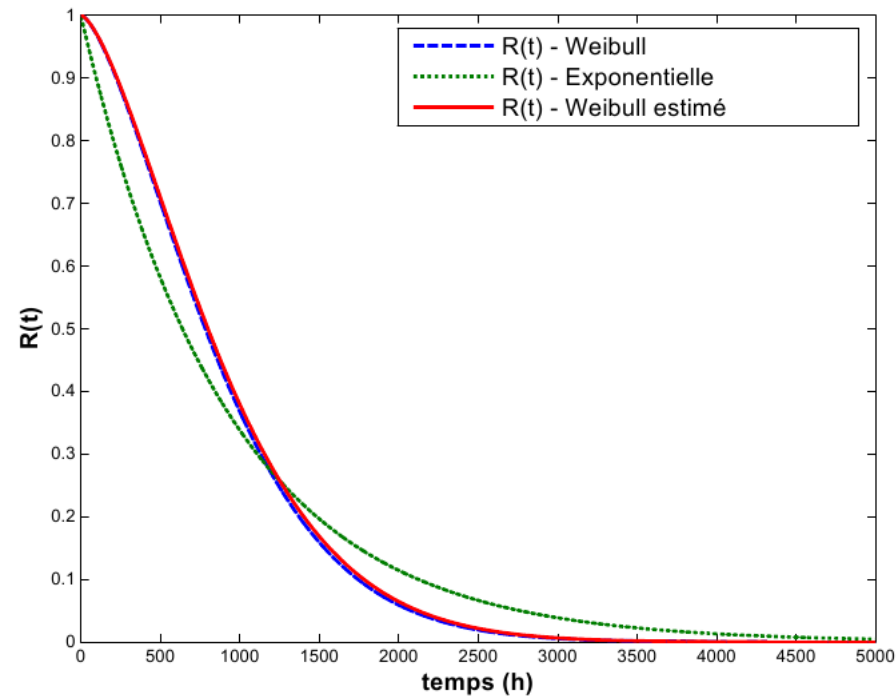


FIGURE 1.18 – Comparaison des lois de Weibull, Exponentielle et Weibull estimée

1.24.10 Un exemple Poisson-Gamma

Un exemple pour le fonctionnement continue avec comptage du nombre de défaillances.

- On compte le nombre de défaillances pendant une période de temps spécifiée.
 - On pourra ensuite réparer la panne ou remplacer l'élément défaillant
- On peut avoir recours à ce type de données si l'on a peu de capteurs ou bien le système n'enregistre que des pannes récentes (par ex. sur un mois seulement).
- Pour ce type de situation, le modèle *Poisson* de base est :

$$f(y|\lambda) = \frac{(\lambda t)^y \exp(-\lambda t)}{y!} \quad \lambda > 0, y = 0, 1, 2, \dots$$

- y est le nbr de défaillances
- λ est le nbr moyen de défaillances par unité (intervalle) de temps
- t est le temps de l'observation (spécifié d'avance).
- Pour les modules réparables, λ sera une intensité.

- On notera que l'égalité de la moyenne et de la variance (ici λt) est une limitation pour l'application de la distribution Poissonnienne.
- Pour le modèle Poissonnien, λ (le nbr moyen de défaillances par intervalle de temps) est le paramètre à estimer.
- L'équation ci-dessus qui est une fonction de λ sachant le nbr de défaillance y observé est une fonction de **vraisemblance** appropriée pour le décompte du nbr de défaillances.
- S'il y a les décomptes y_1, y_2, \dots, y_n pendant les périodes de temps t_1, t_2, \dots, t_n , alors, sous la condition de l'indépendance et d'un λ constante, la fonction de vraisemblance consiste en le produit des m fonctions de vraisemblance individuelles spécifiées par l'équation ci-dessus.
- Pour compléter l'analyse, on doit préciser la distribution *a priori* pour λ .

Distribution *a priori* pour des données Poissonniennes

- Une distribution souvent utilisée pour λ le nbr moyen de défaillances par unité de temps vu dans l'équation ci-dessus est la distribution **Gamma**.

→ Une raison principale : elle est la conjuguée de la distribution *a priori* pour λ et possède un support positif : la distrib. *a priori Gamma* et la vraisemblance *Poissonnienne* ont la même forme de telle sorte que la distrib. résultant *a posteriori* pour λ est aussi une distribution de Poisson.

- Si on a $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda t_i)$, $i = 1, \dots, n$ où y_i sont les différents décomptes de défaillances

Et que la distribution *a priori* pour λ est $\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

Alors la distribution *posteriori* pour λ est $\lambda|y \sim \text{Gamma}(\alpha + \sum_{i=1}^n y_i, \beta + \sum_{i=1}^n t_i)$

Avec $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

→ β est la taille *a priori* (prior sample size) vs. taille des données (data sample size) qui est $\sum_{i=1}^n t_i$;

→ α est le nbr *a priori* des défaillances vs. le nombre observé des défaillances $\sum_{i=1}^n y_i$.

Exemple : Modèle de Poisson appliqué aux pannes des supercomputers

- Soit la modélisation du nbr mensuel des pannes des composantes des super ordinateurs du laboratoire *Blue Mountain* du centre *Los Alamos* par une distribution de Poisson.
- Un super ordinateur possède 47 processeurs identiques et la table ci-dessous donne le nbr (mensuel) des défaillances pour le premier mois du fonctionnement (pour les 47 processeurs).

1	5	1	4	2	3	1	3	6	4	4	4
2	3	2	2	4	5	5	2	5	3	2	2
3	1	1	2	5	1	4	1	1	1	2	1
3	2	5	3	5	2	5	1	1	5	2	

- Soit y_1, y_2, \dots, y_{47} le nbr de défaillances mensuelles enregistrés pour les processeurs.
- Avec $t_i = 1$ mois, on modélise le décompte du nbr de défaillance par l'équation vue ci-dessus :

$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda t) = \text{Poisson}(\lambda), i = 1, \dots, 47$ avec λ : nbr moyen de défaillances mensuelle.

A priori : les ingénieurs estiment qu'il ne doit pas y avoir plus de 10 défaillances par composante dans le 1er mois (voir courbe ci-dessous).

→ Une manière de représenter cette connaissance *a priori* est de supposer une distribution *a priori* **Gamma** pour $\lambda = 5$ (la moyenne de 0 et 10).

→ On représentera cette info a priori par $\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha = 5, \beta = 1)$.

→ Notons qu'avec la distribution $\text{Gamma}(5, 1)$, la proba pour que λ dépasse 10 est de 0.03.

• En utilisant l'équation $\lambda|y$ ci-dessus pour la distribution a posteriori de λ sachant les données $y = y_1, y_2, \dots, y_{47}$, on a

$$\lambda|y \sim \text{Gamma}(\alpha + \sum_{i=1}^n y_i, \beta + \sum_{i=1}^n t_i) = \text{Gamma}(5 + 132, 1 + 47) = \text{Gamma}(137, 48)$$

- La figure suivante représente les 2 distributions pour la moyenne du nbr de défaillances λ .
- NB. : pour confirmer que la distribution Poisson modélise bien le problème, on pourrait appliquer un test χ^2 de goodness-of-fit.

- Données : *Poisson* , a priori et a posteriori : *Gamma* :

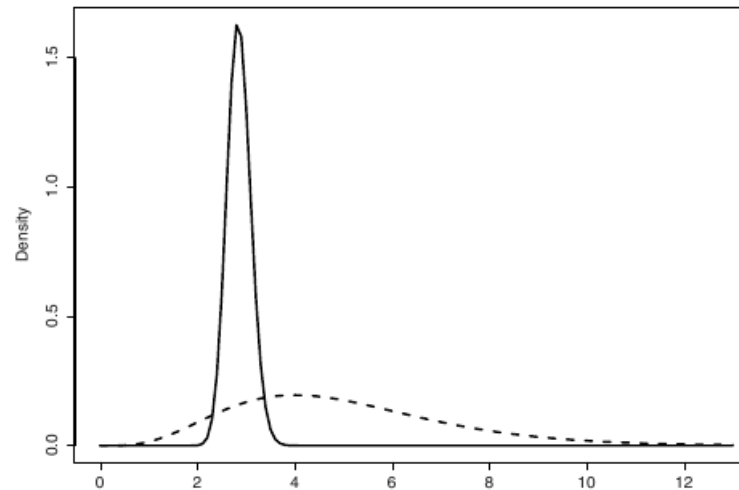


FIGURE 1.19 – pointillé : a priori et solide : a posteriori pour la moyenne λ

- On remarque que la *a priori* (pointillé) est diffuse alors que la *a posteriori* (solide) est piquée et indique que le décompte des défaillances apporte une évidence substantielle pour une moyenne inférieure (à 5) estimée par les ingénieurs.
- Le nbr moyen de défaillances a posteriori est $E(\lambda|y) = \alpha^*/\beta^* = 137/48 = 2.85$
- L'écart type postérieur est $\sqrt{Var(\lambda|y)} = \sqrt{\alpha^*/\beta^{*2}} = 0.24$
- L'intervalle de confiance à 95% est (2.40, 3.35) pour le nbr de défaillances mensuelles.

Table des matières

1.1	Du chapitre précédent	2
1.2	Introduction	3
1.3	Un exemple simple de prédiction de fiabilité	3
1.3.1	Les données ReX du problème	4
1.3.2	Quelques mots sur la Régression	6
1.3.3	Application de la régression logistique	7
1.3.4	Renault : résultats de la Régression Logistique	13
1.3.5	Application des BN à la même BD.	16
1.3.6	Petite introduction aux BN	17
1.3.7	Utilisation conjointe des deux méthodes	30
1.4	Propos et Motivations de calcul de Fiabilité	32
1.5	Contexte de la fiabilité	33
1.5.1	L'apport des BDFs	35
1.5.2	Difficultés inhérentes à la mécanique	36

1.5.3	Exemples de mode de défaillance	38
1.5.4	Les pratiques pour le calcul de la fiabilité	39
1.5.5	Plan sommaire de la suite de cette séance	42
1.6	Généralités sur le calcul de la Fiabilité	43
1.6.1	Quelques définitions	44
1.6.2	Cycle V et les phases de Fiabilités	45
1.7	Différents types de données (tests, REX , ...)	47
1.8	La maintenance : un élément important	51
1.9	Notions relatives à SdF : MTTF, MTBF, MUT, MDT, MTTR	52
1.10	Distributions de survie	55
1.10.1	Fonction de répartition cumulée de défaillance	55
1.10.2	Fonction de Fiabilité	56
1.10.3	La densité de défaillance	57
1.10.4	Exemple loi exponentielle : ventilateurs	61
1.10.5	Le taux de défaillance instantané ou la fonction Hasard $\lambda(t)$	62
1.10.6	Relations entre R, F, f et λ	65
1.10.7	Relations avec les métriques de la SdF	66
1.10.8	Exponentiel : un modèle courant de défaillance	67

1.11 Diagramme de Fiabilité (RBD) et calcul de fiabilité	69
1.11.1 Calcul de fiabilité via RBD de système composé	70
1.11.2 Système cohérent	77
1.12 Exemples Prédiction de Fiabilité de structure	78
1.12.1 Exemple Fiabilité des architectures en Série / Parallèle	79
1.12.2 Modes de défaillance et fiabilité	82
1.12.3 Cas de Fiabilité d'une fonction	83
1.13 Intro. à quelques outils d'analyse/synthèse de Fiabilité	84
1.13.1 Symbolique des arbres de défaillance (FT)	85
1.13.2 Relations FT et RBD	86
1.13.3 Exemple-1 de FT	87
1.13.4 Exemple-2 de FT	88
1.13.5 Passage FT vers BN	89
1.13.6 Complément : Minimal-Path et Cut-Sets	92
1.14 Quelques distributions courantes	95
1.14.1 Complément (historique) : Loi de Gompertz	96
1.14.2 Loi Normale (ou Laplace-Gauss)	100
1.14.3 Loi Log-Normale ou Galton ou Gibrat	101

1.14.4	Loi Gamma	104
1.14.5	Loi Exponentielle	106
1.14.6	Loi Beta	107
1.14.7	Loi Poisson	109
1.14.8	Loi Weibull	110
1.14.9	Complément : Autres lois : Birnbaum-Saunders	115
1.14.10	Autres lois : Uniforme	118
1.14.11	Bilan : Choix d'une distribution*	119
1.14.12	Où en sommes nous ? : la suite	122
1.15	Estimateurs : Méthodes ponctuelles	123
1.15.1	Estimation par la méthode du max de vraisemblance	124
1.15.2	Maximum de vraisemblance avec échantillon complet	125
1.15.3	Maximum de vraisemblance avec échantillon incomplet	127
1.15.4	Vraisemblance et Données censurées sur le temps t_c , type I (b)	129
1.15.5	Données censurées sur la r^{eme} défaillance, type I (c)	130
1.16	Modélisation Bayésienne	132
1.16.1	Modes et modèles de fonctionnement	135
1.16.2	Éléments de la modélisation Bayésienne	137

1.17	Vers le calcul Bayésien	139
1.17.1	Vraisemblance (L) de défaillance en fonctionnement continu	139
1.17.2	Loi a priori pour le fonctionnement continu	140
1.17.2.1	Méconnaissance : non informative	140
1.17.2.2	Peu de connaissance a priori	142
1.17.2.3	Bonne connaissance a priori	143
1.18	Probabilité de défaillance à la sollicitation	144
1.18.1	Méconnaissance : loi uniforme non informative	145
1.18.2	Peu de connaissance a priori	146
1.18.3	Bonne connaissance a priori	147
1.19	Résumé du calcul Bayésien	148
1.20	Un exemple d'analyse Bayésienne : sollicitation	149
1.21	Application aux Soupapes de sureté	152
1.21.1	Application de la méthode Bayésien	154
1.21.2	La modélisation soupape	156
1.21.3	La vraisemblance soupape (Exponentielle)	157
1.21.4	La distribution a priori soupape (Gamma)	158
1.21.5	Pondérations des BDs	159

1.21.6 Taux de défaillance	160
1.21.7 Analyse des résultats	161
1.22 Autres méthodes	162
1.23 Quelques références Bibliographiques (DM + fiabilité)	163
1.24 Annexes	164
1.24.1 A propos de la SdF	164
1.24.2 Différents types de censures	165
1.24.3 Différents types de Maintenance	169
1.24.3.1 Maintenance Corrective	169
1.24.3.2 Maintenance Préventive	172
1.24.3.3 Liens avec la Modélisation	173
1.24.4 Calcul de $F(t)$ à partir d'observations	174
1.24.5 Exemple de calcul du taux de défaillance (d'avarie)	176
1.24.6 Un autre exemple de calcul simple MTBF et MTTF	177
1.24.7 Minimal Path et Cut Sets	178
1.24.7.1 Exemple	183
1.24.7.2 Résumé cut-set	185
1.24.7.3 Exemple 2 (de cut set)	187

1.24.7.4 Exemple 3 (de cut set)	188
1.24.7.5 Blocs Miroirs	189
1.24.8 Fiabilité et le cycle de vie	191
1.24.9 Ex Weibull : Simulation de modèles dysfonctionnels	192
1.24.10 Un exemple Poisson-Gamma	195